§4.9　簡単な有理関数のグラフ

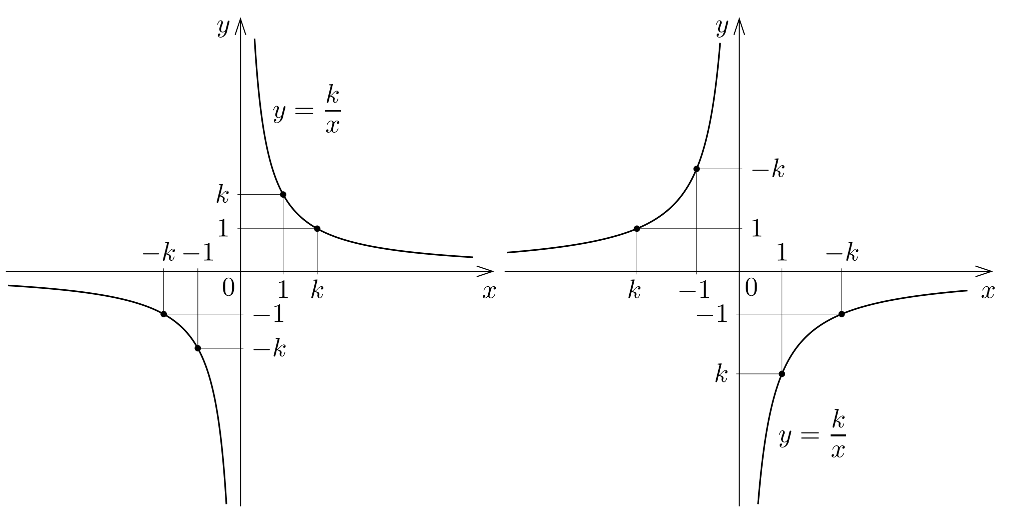
分母分子が整式である分数式と等しくなる式を有理式といいました．変数 x の関数 y が**有理関数**であるとは，$y=f(x)$ となる式 $f(x)$ が x の有理式になることです．例えば，変数 x と y とについて，

$$y = 3+\frac{7}{2x+5}\ ,\qquad y=\frac{8x+5}{x^2-3x+6}\ ,\qquad y = 2x-5+\frac{6}{3x-1}$$

などとなるとき，右辺は x の有理式ですから，変数 y は 変数 x の有理関数です．整式は有理式ですから，有理整関数は有理関数です．

まず，0 でない定数 k に対して，変数 x の関数 $y=\dfrac{k}{x}$ を考えます．この関数は反比例と呼ばれます．次のことに注意して下さい：$x=0$ のとき $y=\dfrac{k}{x}$ の値は存在しない．

xy 座標平面において，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを描いてみます．



$k>0$ のときの $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフ　　　　$k<0$ のときの $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフ

次のことが成り立ちます：xy 座標平面において，関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフは，

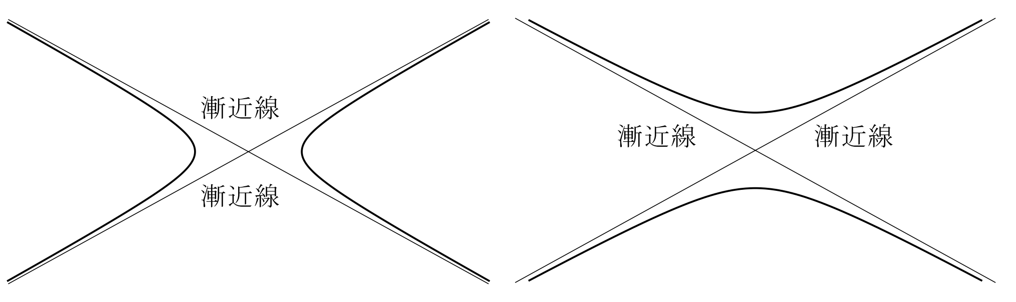
(1) 原点に関して対称であり，

(2) 直線 $y=x$ 及び直線 $y=-x$ に関して対称であり，

(3) x 軸及び y 軸に限りなく近付いていく．

xy 座標平面において，関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフは双曲線とよばれる曲線になります．

一般に，双曲線 (hyperbola) は離れた 2 本の曲線より成り，どちらの曲線も伸ばしていくと直線に限りなく近付いていきます．このような直線をその双曲線の漸近線といいます．1 組の双曲線に対してその漸近線は 2 本あります．



双曲線とその漸近線

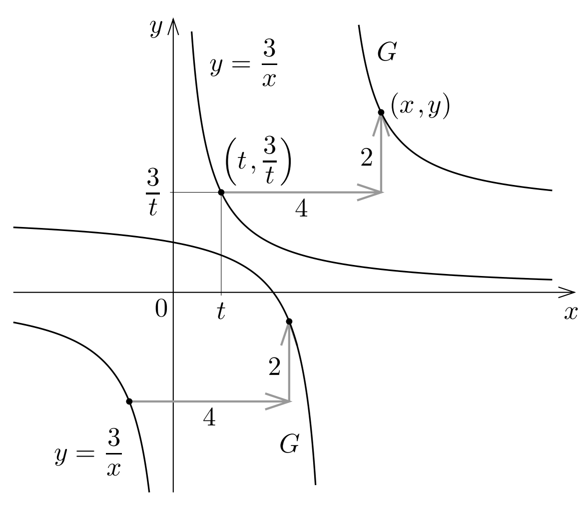
xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフの漸近線は x 軸及び y 軸，つまり直線 $y=0$ 及び直線 $x=0$ です．

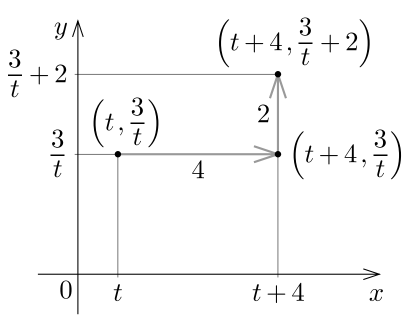
$\boxed{\text{例解}}$　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線を H とおきます（右図参照）．関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフの点は，x 座標を t とすると y 座標は $\dfrac{3}{t}$ ですから，$\left(t,\dfrac{3}{t}\right)$ となります．H の各点 (x,y) は，元の関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフのある点 $\left(t,\dfrac{3}{t}\right)$ を x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ移動させた点 $\left(t+4,\dfrac{3}{t}+2\right)$ です；

$$(x,y) = \left(t+4,\frac{3}{t}+2\right)\ .$$

従って

$$x = t+4\ ,\qquad y=\frac{3}{t}+2\ .$$





まず等式 $x=t+4$ より $t=x-4$ ，これを等式 $y=\dfrac{3}{t}+2$ に代入すると $y=\dfrac{3}{x-4}+2$ ．つまり，関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 4 だけ y 座標の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線 H は関数 $y=\dfrac{3}{x-4}+2$ のグラフです．双曲線を平行移動させるとその漸近線も同じように平行移動します．関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフの漸近線は直線 $x=0$ と $y=0$ ですから，関数 $y=2+\dfrac{3}{x-4}$ のグラフの漸近線は直線 $x=4$ と $y=2$ とです．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{5}{x}$ のグラフを x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く．

〔解説〕 H の各点 (x,y) は，関数 $y=\dfrac{5}{x}$ のグラフの点 $\left(t,\dfrac{5}{t}\right)$（$t$ はある実数）を x の軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた点 $\left(t+2,\dfrac{5}{t}+3\right)$ なので，$(x,y)=\left(t+2,\dfrac{5}{t}+3\right)$ ．よって

$$x = t+2 \text{ かつ } y=\frac{5}{t}+3\ .$$

$x=t+2$ より $t=x-2$ ；これを $y=\dfrac{5}{t}+3$ に代入すると $y=\dfrac{5}{x-2}+3$ ．故に H をグラフとする関数は $y=3+\dfrac{5}{x-2}$ である．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.9.1}}$　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{2}{x}$ のグラフを x の軸の向きに -3 だけ y 軸の向きに -4 だけ平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表わす方程式を導きなさい（導く過程を記しなさい）．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを直線 $x=-4$ と直線 $y=5$ とが漸近線になるように平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表す方程式を導く．

〔解説〕 関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフの漸近線である直線 $x=0$ と直線 $y=0$ とがそれぞれ直線 $x=-4$ と直線 $y=5$ とに移動する平行移動で，各点は x の軸の向きに -4 だけ y 軸の向きに 5 だけ平行移動する．H の各点 (x,y) は，関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフの点 $\left(t,\dfrac{3}{t}\right)$（$t$ はある実数）を x の軸の向きに -4 だけ y 軸の向きに 5 だけ平行移動させた点 $\left(t-4,\dfrac{3}{t}+5\right)$ である：$(x,y)=\left(t-4,\dfrac{3}{t}+5\right)$ ．よって

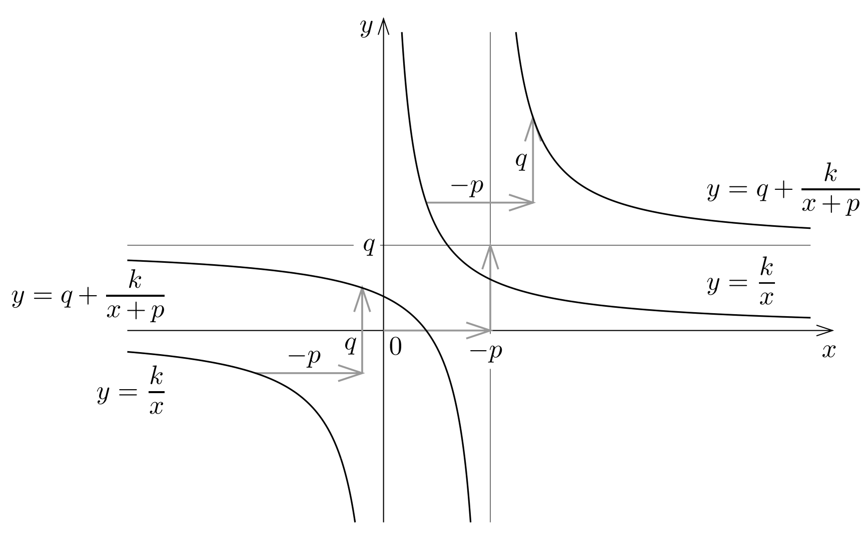
$$x = t-4 \text{ かつ } y=\frac{3}{t}+5\ .$$

$x=t-4$ より $t=x+4$ ；これを $y=\dfrac{3}{t}+5$ に代入すると $y=\dfrac{3}{x+4}+5$ ．故に H をグラフとする関数は $y=5+\dfrac{3}{x+4}$ である．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.9.2}}$　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{4}{x}$ のグラフを直線 $x=3$ と直線 $y=-2$ とが漸近線になるように平行移動させた双曲線 H をグラフとする関数を表わす方程式を導きなさい（導く過程を記しなさい）．

一般的に次の定理が成り立ちます．

> **定理 4.9**　定数 k,p,q（$k\neq 0$）に対し，xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=q+\dfrac{k}{x+p}$ のグラフは，x の関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた双曲線である；その漸近線は直線 $x=-p$ と $y=q$ とである．



$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフと $y=q+\dfrac{k}{x+p}$ のグラフ

$\boxed{\text{例解}}$　変数 x の関数 $y=\dfrac{4x+16}{2x+5}$ を考える．分数式 $\dfrac{4x+16}{2x+5}$ の分子 $4x+16$ を分母 $2x+5$ で割ると整商は 2 で剰余は 6 なので，

$$4x+16 = 2(2x+5)+6\ ,$$

よって

$$\frac{4x+16}{2x+5} = \frac{2(2x+5)+6}{2x+5} = 2+\frac{6}{2x+5} = 2+\frac{3}{x+\frac{5}{2}}\ .$$

従って，関数を表す方程式 $y=\dfrac{4x+16}{2x+5}$ は次のように同値変形できます：

$$y = 2+\frac{3}{x+\frac{5}{2}}\ .$$

xy 座標平面において，この関数のグラフは，関数 $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを x 軸の向きに $-\dfrac{5}{2}$ だけ y 軸の向きに 2 だけ平行移動させた双曲線であり，その漸近線は直線 $x=-\dfrac{5}{2}$ と $y=2$ とです．$\boxed{\text{終}}$

このようにして，一般的に，関数を表す式 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$（a,b,c,d は定数で $c\neq 0$）は $y=q+\dfrac{k}{x+p}$（k,p,q は定数）の形に同値変形できます．

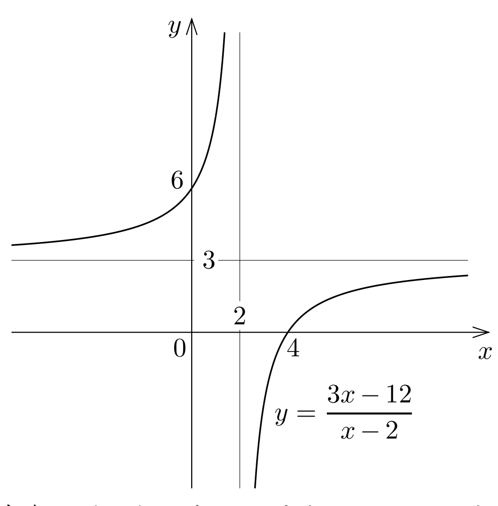
$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\dfrac{3x-12}{x-2}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描く．

〔解説〕 分子 $3x-12$ を分母 $x-2$ で割ると整商は 3 で剰余は -6 なので $3x-12=3(x-2)-6$ ；よって，

$$y = \frac{3x-12}{x-2} = \frac{3(x-2)-6}{x-2} = 3-\frac{6}{x-2}\ .$$

この関数のグラフは，関数 $y=-\dfrac{6}{x}$ のグラフを x 軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ平行移動させた双曲線であり，その漸近線は直線 $x=2$ と $y=3$ とである．

$y=\dfrac{3x-12}{x-2}$ より，$y=0$ のとき $\dfrac{3x-12}{x-2}=0$ ，よって $3x-12=0$ なので $x=4$ ；このとき分母は 0 にならない．



従って $y=\dfrac{3x-12}{x-2}$ のグラフと x 軸との共有点は $(4,0)$ である．また，$x=0$ のとき $y=6$ なので，$y=\dfrac{3x-12}{x-2}$ のグラフと y 軸との共有点は $(0,6)$ である．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.9.3}}$　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{2x-10}{x-3}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描きなさい．

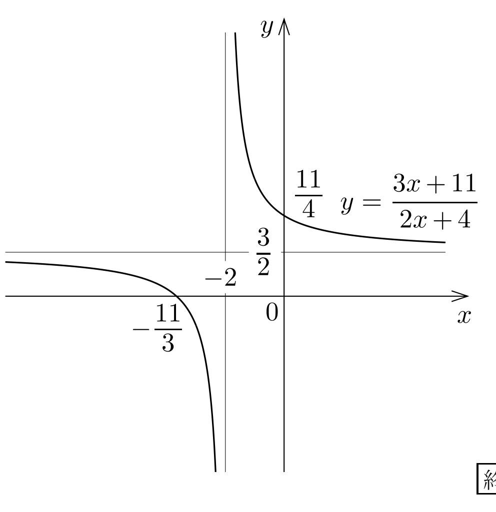
$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{3x+11}{2x+4}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描く．

〔解説〕 分子 $3x+11$ を分母 $2x+4$ で割ると整商は $\dfrac{3}{2}$ で剰余は 5 なので $3x+11=\dfrac{3}{2}(2x+4)+5$ ；よって，

$$y = \frac{3x+11}{2x+4} = \frac{\frac{3}{2}(2x+4)+5}{2x+4} = \frac{3}{2}+\frac{5}{2x+4} = \frac{3}{2}+\frac{\frac{5}{2}}{x+2}\ .$$

この関数のグラフは，関数 $y=\dfrac{5}{2x}$ のグラフを x 軸の向きに -2 だけ y 軸の向きに $\dfrac{3}{2}$ だけ平行移動させた双曲線であり，その漸近線は直線 $x=-2$ と $y=\dfrac{3}{2}$ である．

$y=\dfrac{3x+11}{2x+4}$ より，$y=0$ のとき $\dfrac{3x+11}{2x+4}=0$ ，よって $3x+11=0$ なので $x=-\dfrac{11}{3}$ ；このとき分母は 0 にならない．従って $y=\dfrac{3x+11}{2x+4}$ のグラフと x 軸との共有点は $\left(-\dfrac{11}{3},0\right)$ である．また，$x=0$ のとき $y=\dfrac{11}{4}$ なので，$y=\dfrac{3x+11}{2x+4}$ のグラフと y 軸との共有点は $\left(0,\dfrac{11}{4}\right)$ である．



$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.9.4}}$　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{5x+22}{2x+6}$ のグラフの漸近線を求めてグラフの概形を描きなさい．