

§5.1 不等式の性質

実数の大小関係に関する法則・定理をいくつか加えます。

法則 5.1.1 任意の実数 a, b, c について、 $a < b$ かつ $b < c$ ならば、 $a < c$.

定理 5.1.1 任意の実数 a, b, c について以下のことが成り立つ：

$$a < b \text{ かつ } b \leq c \text{ ならば } a < c ;$$

$$a \leq b \text{ かつ } b < c \text{ ならば } a < c ;$$

$$a \leq b \text{ かつ } b \leq c \text{ ならば } a \leq c .$$

証明 例として “ $a < b$ かつ $b \leq c$ ならば $a < c$ ” を証明する。

実数 a, b, c について $a < b$ かつ $b \leq c$ と仮定する。 $b \leq c$ なので、法則 1.5.1 より、 $b < c$ または $b = c$. $a < b$ なので、 $b < c$ のとき法則 5.1.1 より $a < c$. また、 $a < b$ なので、 $b = c$ のとき $a < c$. このように、 $b < c$ のときも $b = c$ のときも $a < c$. (証明終り)

定理 5.1.2 任意の実数 a, b, c, d について、

$$a < b \text{ かつ } c < d \text{ ならば } a + c < b + d ,$$

$$a \leq b \text{ かつ } c \leq d \text{ ならば } a + c \leq b + d .$$

証明 例として “ $a < b$ かつ $c < d$ ならば $a + c < b + d$ ” を証明する。

$a < b$ かつ $c < d$ と仮定する。 $a < b$ なので、法則 1.5.3 より

$$a + c < b + c .$$

また、 $c < d$ なので、法則 1.5.3 より $c + b < d + b$, つまり

$$b + c < b + d .$$

このように、 $a + c < b + c$ かつ $b + c < b + d$ なので、法則 5.1.1 より $a + c < b + d$.

(証明終り)

定理 5.1.3 任意の実数 a について、

$$a^2 \leq 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0 ,$$

$$a^2 > 0 \iff a^2 \neq 0 \iff a \neq 0 .$$

証明 定理 1.5.10 より $a^2 \geq 0$ なので、 $a^2 \leq 0$ ならば、定理 1.5.4 より $a^2 = 0$, よって定理 1.1.2 より $a = 0$. 逆に、 $a = 0$ ならば、 $a^2 = 0$ なので、定理 1.5.1 より $a^2 \leq 0$. 故に

$$a^2 \leq 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0 .$$

従って¹⁾

$$a^2 \not\leq 0 \iff a \neq 0 .$$

法則 1.5.2 より、

$$a^2 > 0 \iff a^2 \not\leq 0 \iff a \neq 0 .$$

(証明終り)

定理 5.1.4 任意の実数 a, b について、

$$a^2 + b^2 \leq 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0 \text{ かつ } b = 0 .$$

証明 定理 1.5.10 より $b^2 \geq 0$, 定理 1.5.5 より $-b^2 \leq 0$. $a^2 + b^2 \leq 0$ ならば、 $a^2 \leq -b^2 \leq 0$, 定理 5.1.3 より $a = 0$. 同様に、 $a^2 \geq 0$ より $-a^2 \leq 0$ なので、 $a^2 + b^2 \leq 0$ ならば、 $b^2 \leq -a^2 \leq 0$, 定理 5.1.3 より $b = 0$. 逆に、 $a = 0$ かつ $b = 0$ ならば、 $a^2 + b^2 = 0$ なので、 $a^2 + b^2 \leq 0$. (証明終り)

実数 a, b, c に対して、“ $a < b$ かつ $b < c$ ” ということを $a < b < c$ というように、“ $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ” ということを $a \leq b \leq c$ というように書き表します。

定理 5.1.5 任意の実数 a, b, c, d について、

$$0 \leq a < b \text{ かつ } 0 \leq c < d \text{ ならば } ac < bd ,$$

$$0 \leq a \leq b \text{ かつ } 0 \leq c \leq d \text{ ならば } ac \leq bd .$$

証明 例として “ $0 \leq a \leq b$ かつ $0 \leq c \leq d$ ならば $ac \leq bd$ ” を証明する。

$0 \leq a \leq b$ かつ $0 \leq c \leq d$ と仮定する。 $a \leq b$ かつ $c \geq 0$ なので、定理 1.5.7 より $ac \leq bc$. また、 $c \leq d$ かつ $b \geq 0$ なので、定理 1.5.7 より $cb \leq db$. このように、 $ac \leq bc$ かつ $bc \leq bd$ なので、定理 5.1.1 より $ac \leq bd$. (証明終り)

定理 5.1.6 任意の実数 a と b について、

$$0 \leq a < b \text{ ならば } a^2 < b^2 ,$$

$$0 \leq a \leq b \text{ ならば } a^2 \leq b^2 .$$

証明 例として $0 \leq a < b$ ならば $a^2 < b^2$ を証明する。

定理 5.1.5 より、任意の実数 a と b について、

$$0 \leq a < b \text{ かつ } 0 \leq a < b \text{ ならば } aa < bb ;$$

つまり、 $0 \leq a < b$ ならば $a^2 < b^2$. (証明終り)

実数 a と b について、 $a^2 < b^2$ のときいつも $a < b$ とは限りません；例えば、 $a = 2$, $b = -3$ とすると、 $a^2 < b^2$ ですが $a \not< b$ です。しかし、 $b \geq 0$ ならば、 $a^2 < b^2$ のときいつも $a < b$ です。

定理 5.1.7 任意の実数 a と b について以下のことが成り立つ：

$$a^2 < b^2 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ ならば } a < b ;$$

$$a^2 \leq b^2 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ ならば } a \leq b .$$

証明 “ $a^2 \leq b^2$ かつ $b \geq 0$ ならば $a \leq b$ ” を証明する。

$b \geq 0$ と仮定する。 $a > b$ ならば、仮定 $0 \leq b$ より $0 \leq b < a$ なので、定理 5.1.6 より $b^2 < a^2$; つまり、 $a > b$ ならば $a^2 > b^2$. 対偶をとると、

$$a^2 \not> b^2 \text{ ならば } a \not> b .$$

法則 1.5.2 より、

$$a^2 \not> b^2 \iff a^2 \leq b^2 , \quad a \not> b \iff a \leq b ,$$

従って、 $a^2 \leq b^2$ ならば $a \leq b$.

つまり、 $b \geq 0$ とすると、 $a^2 \leq b^2$ ならば $a \leq b$. 故に、 $a^2 \leq b^2$ かつ $b \geq 0$ ならば、 $a \leq b$. (証明終り)

例えば、実数 2 と 5 について $2 < 5$ ですが、それらの逆数 $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{5}$ については $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ となります。一般的に次の定理が成り立ちます。

定理 5.1.8 任意の実数 a と b について、

$$0 < a < b \text{ ならば } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} ,$$

$$0 < a \leq b \text{ ならば } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} .$$

証明 例として “ $0 < a < b$ ならば $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ” を証明する。

$0 < a < b$ と仮定する。 $a > 0$, $b > 0$ なので、定理 1.5.8 より $ab > 0$, 従って定理 1.5.11 より $\frac{1}{ab} > 0$. $a < b$ かつ $\frac{1}{ab} > 0$ なので、法則 1.5.3 より $a \frac{1}{ab} < b \frac{1}{ab}$, つまり $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. (証明終り)

変数 x に関する不等式とは、 x に関する条件を表す不等式のことです。1.9 節で述べたように虚数には大小関係がありませんから、特に断りがない限り、不等式に表れる変数は実数を表します。それで、不等式に現れる変数 x については、“実数を表す変数 x ” というべきところを“変数 x ” ということにします。

¹⁾ 0.6 節で述べたように、述語 A と B について、“ $A \iff B$ ” のとき “ A でない $\iff B$ でない” でした。