§5.1　不等式の性質

実数の大小関係に関する法則・定理をいくつか加えます．

法則 5.1.1　任意の実数 a, b, c について，$a < b$ かつ $b < c$ ならば，$a < c$．

定理 5.1.1　任意の実数 a, b, c について以下のことが成り立つ：

$$a < b \text{ かつ } b \leq c \quad \text{ならば}, \quad a < c \ ;$$
$$a \leq b \text{ かつ } b < c \quad \text{ならば}, \quad a < c \ ;$$
$$a \leq b \text{ かつ } b \leq c \quad \text{ならば}, \quad a \leq c \ .$$

証明　例として“ $a < b$ かつ $b \leq c$ ならば $a < c$ ”を証明する．

実数 a, b, c について $a < b$ かつ $b \leq c$ と仮定する．$b \leq c$ なので，法則 1.5.1 より，$b < c$ または $b = c$．$a < b$ なので，$b < c$ のとき法則 5.1.1 より $a < c$．また，$a < b$ なので，$b = c$ のとき $a < c$．このように，$b < c$ のときも $b = c$ のときも $a < c$．（証明終り）

定理 5.1.2　任意の実数 a, b, c, d について，

$$a < b \text{ かつ } c < d \quad \text{ならば} \quad a + c < b + d \ ,$$
$$a \leq b \text{ かつ } c \leq d \quad \text{ならば} \quad a + c \leq b + d \ .$$

証明　例として“ $a < b$ かつ $c < d$ ならば $a + c < b + d$ ”を証明する．

$a < b$ かつ $c < d$ と仮定する．$a < b$ なので，法則 1.5.3 より

$$a + c < b + c \ .$$

また，$c < d$ なので，法則 1.5.3 より $c + b < d + b$，つまり

$$b + c < b + d \ .$$

このように，$a + c < b + c$ かつ $b + c < b + d$ なので，法則 5.1.1 より $a + c < b + d$．
（証明終り）

定理 5.1.3　任意の実数 a について，

$$a^2 \leq 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0 \ ,$$
$$a^2 > 0 \iff a^2 \neq 0 \iff a \neq 0 \ .$$

証明　定理 1.5.10 より $a^2 \geq 0$ なので，$a^2 \leq 0$ ならば，定理 1.5.4 より $a^2 = 0$，よって定理 1.1.2 より $a = 0$．逆に，$a = 0$ ならば，$a^2 = 0$ なので，定理 1.5.1 より $a^2 \leq 0$．故に

$$a^2 \leq 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0 \ .$$

従って [1]

$$a^2 \not\leq 0 \iff a \neq 0 \ .$$

法則 1.5.2 より，

$$a^2 > 0 \iff a^2 \not\leq 0 \iff a \neq 0 \ .$$

（証明終り）

定理 5.1.4　任意の実数 a, b について，

$$a^2 + b^2 \leq 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0 \text{ かつ } b = 0 \ .$$

証明　定理 1.5.10 より $b^2 \geq 0$，定理 1.5.5 より $-b^2 \leq 0$．$a^2 + b^2 \leq 0$ ならば，$a^2 \leq -b^2 \leq 0$，定理 5.1.3 より $a = 0$．同様に，$a^2 \geq 0$ より $-a^2 \leq 0$ なので，$a^2 + b^2 \leq 0$ ならば，$b^2 \leq -a^2 \leq 0$，定理 5.1.3 より $b = 0$．逆に，$a = 0$ かつ $b = 0$ ならば，$a^2 + b^2 = 0$ なので，$a^2 + b^2 \leq 0$．（証明終り）

実数 a, b, c に対して，“ $a < b$ かつ $b < c$ ”ということを $a < b < c$ というように，“ $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ”ということを $a \leq b \leq c$ というように書き表します．

定理 5.1.5　任意の実数 a, b, c, d について，

$$0 \leq a < b \text{ かつ } 0 \leq c < d \quad \text{ならば} \quad ac < bd \ ,$$
$$0 \leq a \leq b \text{ かつ } 0 \leq c \leq d \quad \text{ならば} \quad ac \leq bd \ .$$

証明　例として“ $0 \leq a \leq b$ かつ $0 \leq c \leq d$ ならば $ac \leq bd$ ”を証明する．

$0 \leq a \leq b$ かつ $0 \leq c \leq d$ と仮定する．$a \leq b$ かつ $c \geq 0$ なので，定理 1.5.7 より $ac \leq bc$．また，$c \leq d$ かつ $b \geq 0$ なので，定理 1.5.7 より $cb \leq db$．このように，$ac \leq bc$ かつ $bc \leq bd$ なので，定理 5.1.1 より $ac \leq bd$．（証明終り）

定理 5.1.6　任意の実数 a と b とについて，

$$0 \leq a < b \text{ ならば } a^2 < b^2 \ ,$$
$$0 \leq a \leq b \text{ ならば } a^2 \leq b^2 \ .$$

証明　例として $0 \leq a < b$ ならば $a^2 < b^2$ を証明する．

定理 5.1.5 より，任意の実数 a と b とについて，

$$0 \leq a < b \text{ かつ } 0 \leq a < b \text{ ならば}, \quad aa < bb \ ;$$

つまり，$0 \leq a < b$ ならば $a^2 < b^2$．（証明終り）

実数 a と b とについて，$a^2 < b^2$ のときいつも $a < b$ とは限りません；例えば，$a = 2$，$b = -3$ とすると，$a^2 < b^2$ ですが $a \not< b$ です．しかし，$b \geq 0$ ならば，$a^2 < b^2$ のときいつも $a < b$ です．

定理 5.1.7　任意の実数 a と b とについて以下のことが成り立つ：

$$a^2 < b^2 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ ならば}, \quad a < b \ ;$$
$$a^2 \leq b^2 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ ならば}, \quad a \leq b \ .$$

証明　“ $a^2 \leq b^2$ かつ $b \geq 0$ ならば，$a \leq b$ ”を証明する．

$b \geq 0$ と仮定する．$a > b$ ならば，仮定 $0 \leq b$ より $0 \leq b < a$ なので，定理 5.1.6 より $b^2 < a^2$；つまり，$a > b$ ならば $a^2 > b^2$．対偶をとると，

$$a^2 \not> b^2 \text{ ならば } a \not> b \ .$$

法則 1.5.2 より，

$$a^2 \not> b^2 \iff a^2 \leq b^2 \ , \qquad a \not> b \iff a \leq b \ ,$$

従って，$a^2 \leq b^2$ ならば $a \leq b$．

つまり，$b \geq 0$ とすると，$a^2 \leq b^2$ ならば $a \leq b$．故に，$a^2 \leq b^2$ かつ $b \geq 0$ ならば，$a \leq b$．（証明終り）

例えば，2 と 5 とについて $2 < 5$ ですが，それらの逆数 $\dfrac{1}{2}$ と $\dfrac{1}{5}$ とについては $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{5}$ となります．一般的に次の定理が成り立ちます．

定理 5.1.8　任意の実数 a と b とについて，

$$0 < a < b \text{ ならば } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \ ,$$
$$0 < a \leq b \text{ ならば } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \ .$$

証明　例として“ $0 < a < b$ ならば $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ ”を証明する．

$0 < a < b$ と仮定する．$a > 0$，$b > 0$ なので，定理 1.5.8 より $ab > 0$，従って定理 1.5.11 より $\dfrac{1}{ab} > 0$．$a < b$ かつ $\dfrac{1}{ab} > 0$ なので，法則 1.5.3 より $a\dfrac{1}{ab} < b\dfrac{1}{ab}$，つまり $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$．（証明終り）

変数 x に関する不等式とは，x に関する条件を表す不等式のことです．1.9 節で述べたように虚数には大小関係がありませんから，特に断りがない限り，不等式に表れる変数は実数を表します．それで，不等式に現れる変数 x については，“実数を表す変数 x ”というべきところを“変数 x ”ということにします．

---

[1] 0.6 節で述べたように，述語 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ とについて，“ $\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$ ”のとき“ $\mathcal{A}$ でない $\iff$ $\mathcal{B}$ でない ”でした．