

§5.2 2次不等式の証明

変数 x に関する不等式が次の何れかの形に整理できるとき、その不等式を x に関する2次不等式といいます：

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \quad ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0;$$

ここで定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ です。2次不等式の証明とは目標の2次不等式を導くことです。そのためによく用いられるのが定理1.5.10です：任意の実数 A について $A^2 \geq 0$ 。

例解 次のことを示します：任意の実数 x について $x^2 - 6x + 11 > 0$ 。この不等式を導くために左辺の2次式を平方完成します。

$$x^2 - 6x + 11 = (x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 9 + 11 = (x - 3)^2 + 2.$$

任意の実数 x について、 $(x - 3)^2 \geq 0$ ですから

$$(x - 3)^2 + 2 \geq 2,$$

$2 > 0$ ですから

$$(x - 3)^2 + 2 > 0,$$

$(x - 3)^2 + 2 = x^2 - 6x + 11$ ですから

$$x^2 - 6x + 11 > 0.$$

こうして目標の不等式 $x^2 - 6x + 11 > 0$ が導かれました。 □終

実数 a と b について、 $a - b \geq 0$ ならば、法則1.5.3より $a - b + b \geq 0 + b$ つまり $a \geq b$ です。同様に、 $a - b > 0$ ならば $a > b$ です。このように、任意の実数 a と b について次のようになります：

$$a - b \geq 0 \text{ ならば, } a \geq b, \quad b \leq a;$$

$$a - b > 0 \text{ ならば, } a > b, \quad b < a.$$

このことより次のことが分かります：

不等式 $A \geq B$, $B \leq A$ を導くためには不等式 $A - B \geq 0$ を導けばよい；

不等式 $A > B$, $B < A$ を導くためには不等式 $A - B > 0$ を導けばよい。

例題 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2 + 14 > 12x - 5$ 。

【方針】 不等式 $2x^2 + 14 > 12x - 5$ を導くために不等式 $2x^2 + 14 - (12x - 5) > 0$ を導く；そのために左辺の2次式 $2x^2 + 14 - (12x - 5)$ を平方完成する。

【解答】

$$\begin{aligned} 2x^2 + 14 - (12x - 5) &= 2x^2 - 12x + 19 = 2(x^2 - 6x) + 19 \\ &= 2(x^2 - 6x + 3^2 - 9) + 19 = 2(x - 3)^2 - 18 + 19 \\ &= 2(x - 3)^2 + 1. \end{aligned}$$

任意の実数 x について、 $(x - 3)^2 \geq 0$ なので $2(x - 3)^2 \geq 0$ ，よって $2(x - 3)^2 + 1 \geq 1$ ；更に $1 > 0$ なので

$$2(x - 3)^2 + 1 > 0,$$

$2(x - 3)^2 + 1 = 2x^2 + 14 - (12x - 5)$ なので、

$$2x^2 + 14 - (12x - 5) > 0,$$

$$2x^2 + 14 > 12x - 5.$$

故に、任意の実数 x について $2x^2 + 14 > 12x - 5$ 。 □終

問題5.2.1 次のことを示しなさい：任意の実数 x について $5x^2 - 8x + 2 > 2x^2 - 5$ 。

このように、2次式の平方完成によって次の定理が導かれます。

定理5.2 定数 a, b, c は実数で $a \neq 0$ とする。

$a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ ならば、任意の実数 x について $ax^2 + bx + c > 0$ 。

$a < 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ ならば、任意の実数 x について $ax^2 + bx + c < 0$ 。

証明 “ $a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ ならば、任意の実数 x について $ax^2 + bx + c > 0$ ” であることを証明する。

$a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ と仮定する。 x の2次式 $ax^2 + bx + c$ を平方完成する：

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left\{x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

x を任意の実数とする。 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ なので、仮定 $a > 0$ より $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ ，よって

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

仮定 $a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ より $\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$ ，よって $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$ なので、

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0.$$

故に、任意の実数 x について、

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0.$$

(証明終り)

不等式 $A \geq B$ を証明したとき、等号が成り立つ（つまり $A = B$ となる）条件を調べることがあります。

例題 任意の実数 y について $3y^2 - 7y + 8 \geq 5y - 4$ であることを示し、等号が成り立つ（つまり $3y^2 - 7y + 8 = 5y - 4$ となる）条件を調べる。

【方針】 不等式 $3y^2 - 7y + 8 \geq 5y - 4$ を導くために不等式 $3y^2 - 7y + 8 - (5y - 4) \geq 0$ を導く；そのために左辺の2次式 $3y^2 - 7y + 8 - (5y - 4)$ を平方完成する。

【解答】

$$\begin{aligned} 3y^2 - 7y + 8 - (5y - 4) &= 3y^2 - 12y + 12 = 3(y^2 - 4y) + 12 \\ &= 3(y^2 - 4y + 2^2 - 4) + 12 = 3(y - 2)^2 - 12 + 12 \\ &= 3(y - 2)^2. \end{aligned}$$

任意の実数 y について、 $3(y - 2)^2 \geq 0$ なので

$$3y^2 - 7y + 8 - (5y - 4) \geq 0,$$

従って $3y^2 - 7y + 8 \geq 5y - 4$ 。

等号が成り立つ条件は、 $3y^2 - 7y + 8 = 5y - 4$ ， $3y^2 - 7y + 8 - (5y - 4) = 0$ ， $3(y - 2)^2 = 0$ ， $y - 2 = 0$ ， $y = 2$ 。故に $y = 2$ のときに限り $3y^2 - 7y + 8 = 5y - 4$ 。 □終

問題5.2.2 任意の実数 t について $\frac{3}{4}t^2 + t + 2 \geq \frac{1}{2}t^2 - 2t - 7$ となることを示し、等号が成り立つ条件を調べなさい。

変数が2つの場合を考えます。

例題 次のことを示す：任意の実数 x と y について $2x^2 + 3y^2 > 3x + 5y - 4$ 。

【解説】 $2x^2 + 3y^2 - (3x + 5y - 4)$ を x および y について平方完成する。

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3y^2 - (3x + 5y - 4) &= 2x^2 - 3x + 3y^2 - 5y + 4 \\ &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 3\left(y^2 - \frac{5}{3}y\right) + 4 \\ &= 2\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3^2}{4^2}\right\} + 3\left\{y^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}y + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{5^2}{6^2}\right\} + 4 \\ &= 2\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right\} - \frac{9}{8} + 3\left\{y^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}y + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right\} - \frac{25}{12} + 4 \\ &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(y - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{19}{24}. \end{aligned}$$

任意の実数 x と y について、 $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \geq 0$ かつ $\left(y - \frac{5}{6}\right)^2 \geq 0$ なので、

$$2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(y - \frac{5}{6}\right)^2 \geq 0,$$

$$2x^2 + 3y^2 - (3x + 5y - 4) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(y - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{19}{24} \geq \frac{19}{24} > 0,$$

よって $2x^2 + 3y^2 > 3x + 5y - 4$ 。 □終

問題5.2.3 次のことを示しなさい：任意の実数 x と y について

$$3x^2 + 4y^2 > 5x - 3y - 3.$$

問題5.2.4 任意の実数 a と b について $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$ となることを示し、等号が成り立つ条件を調べなさい。