§5.4　区間

直感的にいうと，**区間** (interval) とは隙間がない実数の集合のことです．その正確な定義は次のようになります．

定義　実数の集合 I が区間であるとは次の条件を満たすことである：任意の実数 x,y,z について，$x \in I$ かつ $z \in I$ かつ $x<y<z$ ならば，$y \in I$ ．

実数 a,b に対して，$a \le x \le b$ である実数 x の全体 $\{\, x \mid a \le x \le b \,\}$ は区間です；この区間を $[a,b]$ と表記します 2)：

$$[a,b] = \{\, x \mid x \text{ は実数で } a \le x \le b \,\} .$$

実数 x について，

$$x \text{ が区間 } [a,b] \text{ に属す} \iff x \in [a,b] \iff a \le x \le b .$$

$\boxed{\text{例}}$　区間 $[2,7]$ は，$2 \le x \le 7$ である実数 x の全体 $\{\, x \mid 2 \le x \le 7 \,\}$ です：

$$[2,7] = \{\, x \mid x \text{ は実数で } 2 \le x \le 7 \,\} .$$

つまり，実数 x について，

$$x \text{ が区間 } [2,7] \text{ に属す} \iff x \in [2,7] \iff 2 \le x \le 7 .$$

$\boxed{\text{終}}$

実数 a,b に対して，$a<x<b$ となる実数 x の全体 $\{\, x \mid a<x<b \,\}$ は区間です；この区間を (a,b) と表記します 3)：

$$(a,b) = \{\, x \mid x \text{ は実数で } a<x<b \,\} .$$

実数 x について，

$$x \text{ が区間 } (a,b) \text{ に属す} \iff x \in (a,b) \iff a<x<b .$$

区間を表す記法 (a,b) は座標平面の点の座標を表す記法 (x,y) と同じですが，意味は全く異なります．紛らわしいので注意して下さい．

$\boxed{\text{例}}$　区間を $(-3,5)$ は，$-3<x<5$ となる実数 x の全体 $\{\, x \mid -3<x<5 \,\}$ です；

$$(-3,5) = \{\, x \mid x \text{ は実数で } -3<x<5 \,\} .$$

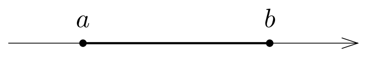
つまり，実数 x について，

$$x \text{ が区間 } (-3,5) \text{ に属す} \iff x \in (-3,5) \iff -3<x<5 .$$

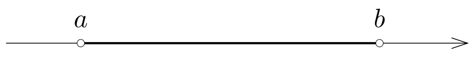
$\boxed{\text{終}}$

実数 a,b に対して，区間 $[a,b]$ には a と b との両方とも属します．区間 (a,b) には a と b との両方とも属しません．

実数 a と b とについて $a<b$ とします．数直線において，区間 $[a,b]$ 及び区間 (a,b) を次のように図示します．



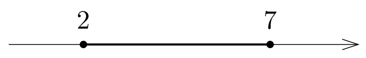
区間 $[a,b]$



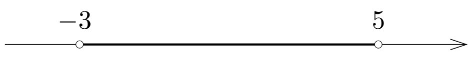
区間 (a,b)

中黒の点 $\bullet$ はその点を含めることを意味し，中抜きの点 $\circ$ はその点を含めないことを意味します．

$\boxed{\text{例}}$　数直線において，区間 $[2,7]$ 及び区間 $(-3,5)$ を次のように図示します．



区間 $[2,7]$



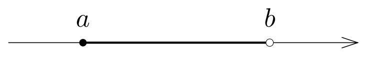
区間 $(-3,5)$

$\boxed{\text{終}}$

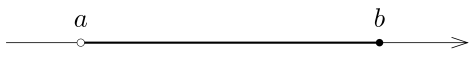
次のような区間もあります：実数 a と b とに対して，

$$[a,b) = \{\, x \mid x \text{ は実数で } a \le x < b \,\} ,$$
$$(a,b] = \{\, x \mid x \text{ は実数で } a < x \le b \,\} .$$

区間 $[a,b)$ には，a は属しますが b は属しません；区間 $(a,b]$ には，a は属しませんが b は属します．



区間 $[a,b)$



区間 $(a,b]$

区間 I について，I に属す実数を I の点ということがあります．例えば，区間 $[-2,5]$ の点 x とは，区間 $[-2,5]$ に属す実数 x のこと，つまり $-2 \le x \le 5$ となる実数 x のことです．

解析学では，議論の便宜のために，2つの仮想的な数 $+\infty$ と $-\infty$ とを用います．$+\infty$ は正の無限大とよばれ，$-\infty$ は負の無限大とよばれます．$+\infty$ も $-\infty$ も実数ではありません．大小関係について，$+\infty$ はどんな実数よりも大きく，$-\infty$ はどんな実数よりも小さいと約束します．つまり，

$$\text{任意の実数 } x \text{ について} \quad -\infty < x < +\infty .$$

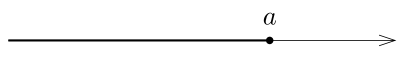
正の無限大 $+\infty$ を ∞ と略記します．

実数 a に対して，

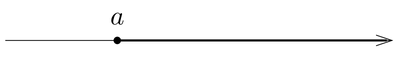
$$a \text{ 以下の実数の全体 } \{\, x \mid x \text{ は実数で } x \le a \,\} ,$$
$$a \text{ より大きい実数の全体 } \{\, x \mid x \text{ は実数で } x > a \,\}$$

等も区間です．このような区間を，$\infty, -\infty$ 4) を用いて以下のように表記します：実数 a に対して，

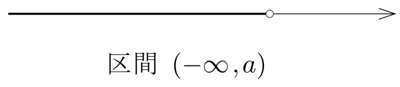
$$(-\infty,a] = \{\, x \mid x \text{ は実数で } -\infty < x \le a \,\} = \{\, x \mid x \text{ は実数で } x \le a \,\} ,$$
$$[a,\infty) = \{\, x \mid x \text{ は実数で } a \le x < \infty \,\} = \{\, x \mid x \text{ は実数で } x \ge a \,\} ,$$
$$(-\infty,a) = \{\, x \mid x \text{ は実数で } -\infty < x < a \,\} = \{\, x \mid x \text{ は実数で } x < a \,\} ,$$
$$(a,\infty) = \{\, x \mid x \text{ は実数で } a < x < \infty \,\} = \{\, x \mid x \text{ は実数で } x > a \,\} .$$



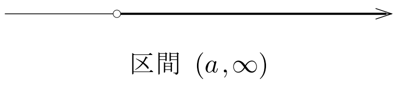
区間 $(-\infty,a]$



区間 $[a,\infty)$



区間 $(-\infty,a)$



区間 (a,∞)

例えば，区間 $[0,\infty)$ は 0 以上の実数全体であり，区間 $(0,\infty)$ は正の実数全体です．

更に，実数全体 $\mathbf{R}$ も 1 つの区間です．

---

2)　$a>b$ のとき，$a \le x \le b$ である実数 x は無いので，区間 $[a,b]$ は空集合 $\emptyset$ です．

3)　$a \ge b$ のとき，$a<x<b$ である実数 x は無いので，区間 (a,b) は空集合 $\emptyset$ です．

4)　区間とは実数の集合です．∞ と $-\infty$ とは実数ではないので，区間に属しません．