

§ 5.4 区間

直感的にいうと、**区間** (interval) とは隙間がない実数の集合のことです。その正確な定義は次のようになります。

定義 実数の集合 I が区間であるとは次の条件を満たすことである：任意の実数 x, y, z について、 $x \in I$ かつ $z \in I$ かつ $x < y < z$ ならば、 $y \in I$ 。

実数 a, b に対して、 $a \leq x \leq b$ である実数 x の全体 $\{x \mid x \text{ は実数で } a \leq x \leq b\}$ は区間です；この区間を $[a, b]$ と表記します²⁾：

$$[a, b] = \{x \mid x \text{ は実数で } a \leq x \leq b\}.$$

実数 x について、

$$x \text{ が区間 } [a, b] \text{ に属す} \iff x \in [a, b] \iff a \leq x \leq b.$$

例 区間 $[2, 5]$ は、 $2 \leq x \leq 5$ である実数 x の全体 $\{x \mid x \text{ は実数で } 2 \leq x \leq 5\}$ です：

$$[2, 5] = \{x \mid x \text{ は実数で } 2 \leq x \leq 5\}.$$

つまり、実数 x について、

$$x \text{ が区間 } [2, 5] \text{ に属す} \iff x \in [2, 5] \iff 2 \leq x \leq 5. \quad \text{終}$$

実数 a, b に対して、 $a < x < b$ となる実数 x の全体 $\{x \mid x \text{ は実数で } a < x < b\}$ は区間です；この区間を (a, b) と表記します³⁾：

$$(a, b) = \{x \mid x \text{ は実数で } a < x < b\}.$$

実数 x について、

$$x \text{ が区間 } (a, b) \text{ に属す} \iff x \in (a, b) \iff a < x < b.$$

区間を表す記法 (a, b) は座標平面の点の座標を表す記法 (x, y) と同じですが、意味は全く異なります。紛らわしいので注意して下さい。

例 区間を $(3, 7)$ は、 $3 < x < 7$ となる実数 x の全体 $\{x \mid x \text{ は実数で } 3 < x < 7\}$ です；

$$(3, 7) = \{x \mid x \text{ は実数で } 3 < x < 7\}.$$

つまり、実数 x について、

$$x \text{ が区間 } (3, 7) \text{ に属す} \iff x \in (3, 7) \iff 3 < x < 7. \quad \text{終}$$

実数 a, b に対して、区間 $[a, b]$ には a と b との両方とも属します。区間 (a, b) には a と b との両方とも属しません。

実数 a と b について $a < b$ とします。数直線において、区間 $[a, b]$ 及び区間 (a, b) を次のように図示します。



中黒の点 \bullet はその点を含めることを意味し、中抜き点 \circ はその点を含めないことを意味します。

例 数直線において、区間 $[2, 5]$ 及び区間 $(3, 7)$ を次のように図示します。



次のような区間もあります：実数 a と b に対して、

$$\begin{aligned} [a, b) &= \{x \mid x \text{ は実数で } a \leq x < b\}, \\ (a, b] &= \{x \mid x \text{ は実数で } a < x \leq b\}. \end{aligned}$$

区間 $[a, b)$ には、 a は属しますが b は属しません。区間 $(a, b]$ には、 a は属しませんが b は属します。



区間 I について、 I に属す実数を I の点ということがあります。例えば、区間 $[2, 5]$ の点 x とは、区間 $[2, 5]$ に属す実数 x のこと、つまり $-2 \leq x \leq 5$ となる実数 x のことです。

解析学では、議論の便宜のために、2つの仮想的な数 $+\infty$ と $-\infty$ とを用います。 $+\infty$ は正の無限大とよばれ、 $-\infty$ は負の無限大とよべられます。 $+\infty$ も $-\infty$ も実数ではありません。大小関係について、 $+\infty$ はどんな実数よりも大きく、 $-\infty$ はどんな実数よりも小さいと約束します。つまり、

$$\text{任意の実数 } x \text{ について } -\infty < x < +\infty.$$

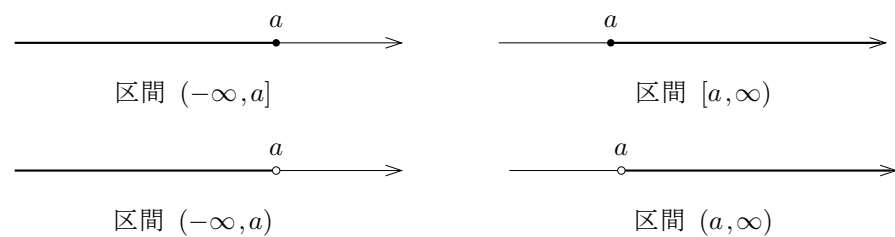
正の無限大 $+\infty$ を ∞ と略記します。

実数 a に対して、

$$\begin{aligned} a \text{ 以下の実数の全体 } & \{x \mid x \text{ は実数で } x \leq a\}, \\ a \text{ より大きい実数の全体 } & \{x \mid x \text{ は実数で } x > a\} \end{aligned}$$

等も区間です。このような区間を、 $\infty, -\infty$ ⁴⁾ を用いて以下のように表記します：実数 a に対して、

$$\begin{aligned} (-\infty, a] &= \{x \mid x \text{ は実数で } -\infty < x \leq a\} = \{x \mid x \text{ は実数で } x \leq a\}, \\ [a, \infty) &= \{x \mid x \text{ は実数で } a \leq x < \infty\} = \{x \mid x \text{ は実数で } x \geq a\}, \\ (-\infty, a) &= \{x \mid x \text{ は実数で } -\infty < x < a\} = \{x \mid x \text{ は実数で } x < a\}, \\ (a, \infty) &= \{x \mid x \text{ は実数で } a < x < \infty\} = \{x \mid x \text{ は実数で } x > a\}. \end{aligned}$$



例えば、区間 $[0, \infty)$ は 0 以上の実数全体であり、区間 $(0, \infty)$ は正の実数全体です。

更に、実数全体 \mathbf{R} も一つの区間です。

²⁾ $a > b$ のとき、 $a \leq x \leq b$ である実数 x は無いので、区間 $[a, b]$ は空集合 \emptyset です。

³⁾ $a \geq b$ のとき、 $a < x < b$ である実数 x は無いので、区間 (a, b) は空集合 \emptyset です。

⁴⁾ 区間とは実数の集合です。 ∞ と $-\infty$ とは実数ではないので、区間に属しません。