§5.5　不等式の解法

変数 x に関する不等式について，その不等式が成り立つような x の値を解といいます．5.1節の末尾で述べたように，特に断りがない限り，不等式に表れる変数は実数を表します．ですから，特に断りがない限り，不等式の解は実数の範囲で考えます．

$\boxed{\text{例}}$　変数 x に関する不等式 $x^2-3x>7$ の解とは，$x^2-3x>7$ となる実数 x のことです． $x=5$ とすると，$x^2-3x=5^2-3\cdot5=10$ なので $x^2-3x>7$ ；よって 5 は不等式 $x^2-3x>7$ の解です． $x=4$ とすると，$x^2-3x=4^2-3\cdot4=4$ なので $x^2-3x\not>7$ ；よって 4 は不等式 $x^2-3x>7$ の解ではありません． $\boxed{\text{終}}$

不等式の解の全体をその不等式の解集合といいます．不等式の解集合を求めることをその不等式を解くといいます．

$\boxed{\text{例}}$　変数 x に関する不等式 $x^2-3x>7$ の解集合 S とは，$x^2-3x>7$ となる実数 x のすべての集まりです：

$$S=\{\,x\mid x\ \text{は実数で}\ \ x^2-3x>7\,\}\ .$$

不等式 $x^2-3x>7$ の解集合 S について，述語 $x^2-3x>7$ と述語 $x\in S$ とが同値になります：

$$x\in S\iff x^2-3x>7\ .$$

x に関する不等式 $x^2-3x>7$ を解くことは，その解集合を求めることであり，不等式 $x^2-3x>7$ と同値でなるべく簡単な述語を求めることです． $\boxed{\text{終}}$

不等式を解くとはその不等式と同値でなるべく簡単な述語を求めることですから，

不等式を解くために変形しても元の不等式と同値でなければならない

ことに注意して下さい．

不等式を解くために次の定理を用います．

定理 5.5　任意の実数 a,b,c について以下のことが成り立つ：

$$a<b\iff a+c<b+c\ ,\qquad a<b\iff a-c<b-c\ ,$$
$$a\le b\iff a+c\le b+c\ ,\qquad a\le b\iff a-c\le b-c\ ;$$

$c>0$ のとき，

$$a<b\iff ac<bc\ ,\qquad a<b\iff \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$$
$$a\le b\iff ac\le bc\ ,\qquad a\le b\iff \frac{a}{c}\le\frac{b}{c}$$

$c<0$ のとき，

$$a<b\iff ac>bc\ ,\qquad a<b\iff \frac{a}{c}>\frac{b}{c}\ ,$$
$$a\le b\iff ac\ge bc\ ,\qquad a\le b\iff \frac{a}{c}\ge\frac{b}{c}\ ,$$

証明　例として次のことを示す：$c>0$ のとき $a<b\iff ac<bc$ ．

$c>0$ とする．法則 1.5.3 より，$a<b$ ならば $ac<bc$ ．また，定理 1.5.11 より $\dfrac{1}{c}>0$ なので，法則 1.5.3 より，$ac<bc$ ならば $ac\dfrac{1}{c}<bc\dfrac{1}{c}$ つまり $a<b$ ．故に，

$$c>0\ \text{のとき}\qquad a<b\iff ac<bc\ .$$

更に例として次のことを示す：$c<0$ のとき $a<b\iff ac>bc$ ．

$c<0$ とする．定理 1.5.6 より，$a<b$ ならば $ac>bc$ ．また，定理 1.5.11 より $\dfrac{1}{c}<0$ なので，定理 1.5.6 より，$ac>bc$ ならば $ac\dfrac{1}{c}<bc\dfrac{1}{c}$ つまり $a<b$ ．故に，

$$c<0\ \text{のとき}\qquad a<b\iff ac>bc\ .$$

（証明終り）