§5.6　1次不等式の解法

変数 x に関する不等式が次の何れかの形に整理できるとき，その方程式を x に関する1次不等式といいます：

$$ax+b<0\ ,\qquad ax+b\leq 0\ ,\qquad ax+b>0\ ,\qquad ax+b\geq 0\ ;$$

ここで a,b は実数を表す定数で $a\neq 0$ です．1次不等式は前節の定理5.5を用いて解けます．

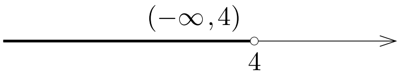
$\boxed{\text{例解}}$ 変数 x に関する1次不等式 $5x-7<2x+5$ を解きます．

$$\begin{aligned}
&5x-7<2x+5\\
\iff\ &5x-7-2x<2x+5-2x \iff 3x-7<5 &&（両辺から\ 2x\ を引く）\\
\iff\ &3x-7+7<5+7 \iff 3x<12 &&（両辺に\ 7\ を加える）\\
\iff\ &\frac{3x}{3}<\frac{12}{3} \iff x<4\ . &&（両辺に\ \tfrac{1}{3}\ を掛ける）
\end{aligned}$$

このように，不等式 $5x-7<2x+5$ と不等式 $x<4$ とは同値です．よって，

不等式 $5x-7<2x+5$ を解くと $x<4$

です．従って，不等式 $5x-7<2x+5$ の解集合は区間 $(-\infty,4)$ です． $\boxed{\text{終}}$



不等式 $5x-7<2x+5$ の解集合

定理5.5として述べたように，実数 c について $c<0$ のとき，実数 a,b について，

$$a<b \iff ac>bc\ ,\qquad a<b \iff \frac{a}{c}>\frac{b}{c}\ .$$

つまり次のことに注意して下さい：

不等式の両辺に負の数を掛ける或いは割ると不等号の向きが逆になる．

$\boxed{\text{例題}}$ 変数 x に関する不等式 $4-\frac{8}{3}x<9-2x$ を解いて解集合を述べる．

〔解説〕 不等式 $4-\frac{8}{3}x<9-2x$ の両辺に $2x$ を足すと $4-\frac{8}{3}x+2x<9-2x+2x$ つまり

$$4-\frac{2}{3}x<9\ ,$$

両辺から 4 を引くと $4-\frac{2}{3}x-4<9-4$ つまり

$$-\frac{2}{3}x<5\ ,$$

両辺に $-\frac{3}{2}$ を 掛けると不等号の向きが逆になって $-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x>-\frac{3}{2}\cdot 5$ つまり

$$x>-\frac{15}{2}\ .$$

故に不等式 $4-\frac{8}{3}x<9-2x$ を解くと $x>-\frac{15}{2}$ ． 解集合は区間 $\left(-\frac{15}{2},\infty\right)$ ．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.6.1}}$ 変数 x に関する不等式 $\frac{x}{3}-7>2x-5$ を解いて解集合を述べなさい．

$\boxed{\text{例題}}$ 変数 y に関する不等式 $\frac{3y-5}{4}\geq\frac{7y+5}{6}$ を解いて解集合を述べる．

〔解説〕 不等式 $\frac{3y-5}{4}\geq\frac{7y+5}{6}$ の両辺に分母の 4 と 6 との最小公倍数 12 を掛けて整理する．

$$\begin{gathered}
12\cdot\frac{3y-5}{4}\geq 12\cdot\frac{7y+5}{6}\ ,\\
3(3y-5)\geq 2(7y+5)\ ,\\
9y-15\geq 14y+10\ ,\\
9y-15-14y+15\geq 14y+10-14y+15\ ,\\
-5y\geq 25\ ,
\end{gathered}$$

よって $y\leq -5$ ． 解集合は区間 $(-\infty,-5]$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.6.2}}$ 変数 y に関する以下の不等式を解いて解集合を述べなさい．

(1) $\frac{4y+7}{3}\leq 2y$ ．　　(2) $\frac{5y-7}{6}<\frac{3y+1}{8}$ ．