

§5.7 連立1次不等式の解法

5.1節で述べたように、変数 x に関する不等式は x の値に関する条件を表します。複数の不等式に対して、各々が表す条件を“かつ”で結んだ条件を考えると、それらの不等式を連立するといいます。

例解 変数 x に関する2つの不等式 $x+7 \geq 5$ と $2x < 6$ とを連立するとき次のように表します：

$$\begin{cases} x+7 \geq 5 \\ 2x < 6 \end{cases}$$

この連立不等式は x の値に関する条件 “ $x+7 \geq 5$ かつ $2x < 6$ ” を表します。

$$x+7 \geq 5 \iff x \geq -2, \quad 2x < 6 \iff x < 3;$$

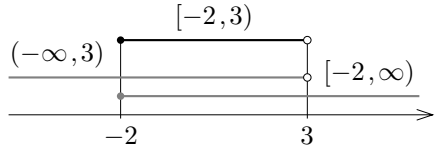
従って、

$$\begin{aligned} x+7 \geq 5 \text{ かつ } 2x < 6 &\iff x \geq -2 \text{ かつ } x < 3 \\ &\iff -2 \leq x < 3. \end{aligned}$$

つまり、与えられた不等式を解くと $-2 \leq x < 3$. よって、 x に関する連立不等式

$$\begin{cases} x+7 \geq 5 \\ 2x < 6 \end{cases}$$

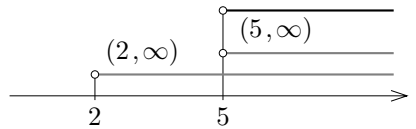
の解集合は、不等式 $x+7 \geq 5$ の解集合 $[-2, \infty)$ と不等式 $2x < 6$ の解集合 $(-\infty, 3)$ との共通部分の $[-2, 3)$ です。



終

例題 変数 x に関する次の連立不等式を解く：
$$\begin{cases} 5x-6 > 3x+4 \\ x+8 < 4x+2 \end{cases}$$

【解説】 不等式 $5x-6 > 3x+4$ を解くと、 $2x > 10$, $x > 5$. 不等式 $x+8 < 4x+2$ を解くと、 $-3x < -6$, $x > 2$. $x > 5$ かつ $x > 2$ ということは、 $x > 5$ ということである。従って、与えられた連立不等式を解くと $x > 5$.



終

問題 5.7.1 変数 x に関する以下の連立不等式を解きなさい。

$$(1) \begin{cases} x-2 > 7-3x \\ 2x+3 \geq 5x-4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 4x-7 \geq 6-x \\ 2x+3 > 5x-8 \end{cases}$$

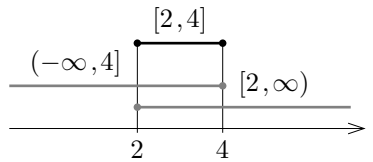
例解 変数 x に関する不等式 $6 \leq 3x \leq x+8$ を解きます。この不等式は “ $6 \leq 3x$ かつ $3x \leq x+8$ ” を意味する連立不等式です。

$$6 \leq 3x \iff x \geq 2, \quad 3x \leq x+8 \iff x \leq 4;$$

従って、

$$\begin{aligned} 6 \leq 3x \leq x+8 &\iff 6 \leq 3x \text{ かつ } 3x \leq x+8 \iff x \geq 2 \text{ かつ } x \leq 4 \\ &\iff 2 \leq x \leq 4. \end{aligned}$$

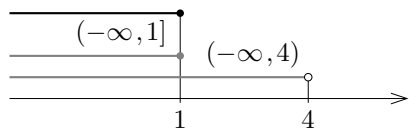
故に、連立不等式 $6 \leq 3x \leq x+8$ を解くと $2 \leq x \leq 4$. つまり、連立不等式 $6 \leq 3x \leq x+8$ の解集合は、 $6 \leq 3x$ の解集合 $[2, \infty)$ と $3x \leq x+8$ の解集合 $(-\infty, 4]$ とに共通する区間 $[2, 4]$ です。



終

例題 変数 y に関する連立不等式 $4y-6 \leq y-3 < 5-y$ を解く。

【解答】 不等式 $4y-6 \leq y-3$ より、 $3y \leq 3$, $y \leq 1$. 不等式 $y-3 < 5-y$ より、 $2y < 8$, $y < 4$. $y \leq 1$ かつ $y < 4$ ということは $y \leq 1$ ということである。従って、与えられた連立不等式を解くと $y \leq 1$.



終

問題 5.7.2 変数 y に関する連立不等式 $3y-5 < y-2 \leq 3-2y$ を解きなさい。

例題 変数 a に関する次の連立不等式を解く：
$$\begin{cases} 4a+1 \leq 9 \\ 3a-7 \geq 8 \end{cases}$$

【解答】 不等式 $4a+1 \leq 9$ より、 $4a \leq 8$, $a \leq 2$. 不等式 $3a-7 \geq 8$ より、 $3a \geq 15$, $a \geq 5$. 従って、与えられた連立不等式を解くと、 $a \leq 2$ かつ $a \geq 5$. このような実数 a は無い。故に、与えられた連立不等式の解は無い。

終

問題 5.7.3 変数 c に関する次の連立不等式を解きなさい：
$$\begin{cases} 4c-2 > 3 \\ 3c+4 < 6 \end{cases}$$