

## §5.8 2次不等式の解法

実数を表す定数  $a, b, c$  (但し  $a \neq 0$ ) に対して、変数  $x$  に関する2次不等式

$$ax^2+bx+c < 0, \quad ax^2+bx+c \leq 0, \quad ax^2+bx+c > 0, \quad ax^2+bx+c \geq 0$$

を解きます。まず次の基本方針を憶えて下さい。

実数を表す定数  $a, b, c$  (但し  $a \neq 0$ ) に対して、変数  $x$  に関する2次不等式

$$ax^2+bx+c < 0, \quad ax^2+bx+c \leq 0, \quad ax^2+bx+c > 0, \quad ax^2+bx+c \geq 0$$

を解くために、2次方程式  $ax^2+bx+c=0$  の判別式  $b^2-4ac$  について、

$$b^2-4ac \geq 0 \text{ のときは左辺 } ax^2+bx+c \text{ を因数分解して、}$$

$$b^2-4ac < 0 \text{ のときは左辺 } ax^2+bx+c \text{ を平方完成する。}$$

最初に2次不等式の左辺の2次式  $ax^2+bx+c$  について  $b^2-4ac > 0$  のときを扱います。このとき、定理3.5より、2次式  $ax^2+bx+c$  は係数が実数の範囲で1次式の積に因数分解できます。

**例解** 変数を表す変数  $x$  に関する以下の2次不等式を解きます：

$$x^2-5x+4 < 0, \quad x^2-5x+4 \leq 0, \quad x^2-5x+4 > 0, \quad x^2-5x+4 \geq 0.$$

まず左辺の2次式  $x^2-5x+4$  を因数分解します：

$$x^2-5x+4 = (x-1)(x-4).$$

因数  $x-1, x-4$  の値の符号は次のようになります：

$x < 1$  のとき  $x-1 < 0$ ,  $x = 1$  のとき  $x-1 = 0$ ,  $x > 1$  のとき  $x-1 > 0$  ;  
 $x < 4$  のとき  $x-4 < 0$ ,  $x = 4$  のとき  $x-4 = 0$ ,  $x > 4$  のとき  $x-4 > 0$  .

これらのことより、 $x = 1$  のところと  $x = 4$  のところが符号が変わる境目になります：

$x < 1$  のとき、 $x-1 < 0$  かつ  $x-4 < 0$  なので  $(x-1)(x-4) > 0$  ;

$x = 1$  のとき、 $x-1 = 0$  なので  $(x-1)(x-4) = 0$  ;

$1 < x < 4$  のとき、 $x-1 > 0$  かつ  $x-4 < 0$  なので  $(x-1)(x-4) < 0$  ;

$x = 4$  のとき、 $x-4 = 0$  なので  $(x-1)(x-4) = 0$  ;

$x > 4$  のとき、 $x-1 > 0$  かつ  $x-4 > 0$  なので  $(x-1)(x-4) > 0$  .

これらのことを次のような表で表します。

$x$ の値	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x$
$x-1$ の符号	-	0	+	+	+
$x-4$ の符号	-	-	-	0	+
$(x-1)(x-4)$ の符号	+	0	-	0	+

この表から次のことが分かります：

$$(x-1)(x-4) < 0 \iff (x-1)(x-4) \text{ の符号は } - \iff 1 < x < 4;$$

$$(x-1)(x-4) \leq 0 \iff (x-1)(x-4) \text{ の符号は } - \text{ か } 0 \iff 1 \leq x \leq 4;$$

$$(x-1)(x-4) > 0 \iff (x-1)(x-4) \text{ の符号は } + \iff x < 1 \text{ または } x > 4;$$

$$(x-1)(x-4) \geq 0 \iff (x-1)(x-4) \text{ の符号は } + \text{ か } 0 \iff x \leq 1 \text{ または } x \geq 4.$$

これらのことは  $x$  の関数  $y = (x-1)(x-4)$

のグラフからも分かります。  $xy$  座標平面に

において、  $y = (x-1)(x-4)$  のグラフと  $x$  軸

との共有点は  $(1,0)$  と  $(4,0)$  とです。また、

$y = (x-1)(x-4)$  のグラフは下に凸の放物線

です。  $y = (x-1)(x-4)$  のとき

$$(x-1)(x-4) \leq 0 \iff y \leq 0.$$

従って、  $y = x^2-5x+4$  のグラフにおいて次

のようになります：

$$x \text{ 座標について } (x-1)(x-4) \leq 0 \text{ となる部分} = y \text{ 座標が } 0 \text{ 以下の部分}.$$

同様に考えると、  $y = (x-1)(x-4)$  のグラフにおいて次のようになります：

$$x \text{ 座標について } (x-1)(x-4) < 0 \text{ となる部分} = y \text{ 座標が } 0 \text{ より小さい部分},$$

$$x \text{ 座標について } (x-1)(x-4) \geq 0 \text{ となる部分} = y \text{ 座標が } 0 \text{ 以上の部分},$$

$$x \text{ 座標について } (x-1)(x-4) > 0 \text{ となる部分} = y \text{ 座標が } 0 \text{ より大きい部分}.$$

$$y = (x-1)(x-4) < 0$$

$$y = (x-1)(x-4) \geq 0$$

$$y = (x-1)(x-4) > 0$$

$$\iff 1 < x < 4$$

$$\iff x \leq 1 \text{ または } x \geq 4$$

$$\iff x < 1 \text{ または } x > 4$$

このようにして以下のことが分かります：

不等式  $(x-1)(x-4) < 0$  を解くと  $1 < x < 4$ ,

不等式  $(x-1)(x-4) \leq 0$  を解くと  $1 \leq x \leq 4$ ,

不等式  $(x-1)(x-4) > 0$  を解くと  $x < 1$  または  $x > 4$ ,

不等式  $(x-1)(x-4) \geq 0$  を解くと  $x \leq 1$  または  $x \geq 4$ . 終

**例題** 変数を表す変数  $x$  に関する不等式  $6-2x^2 \leq x$  を解く。

**【解説】** 不等式  $6-2x^2 \leq x$  より  $-2x^2-x+6 \leq 0$  .  $x^2$  の係数を正にする方が考え易いので、両辺に  $-1$  を掛けて

$$2x^2+x-6 \geq 0.$$

左辺を因数分解すると  $2x^2+x-6 = (x+2)(2x-3)$  なので

$$(x+2)(2x-3) \geq 0.$$

符号を調べるためには  $x$  の係数が  $1$  の方が分かりやすいので、左辺の因数  $2x-3$

を  $2$  で割る (同時に右辺も  $2$  で割る)：

$$(x+2)\left(\frac{2x-3}{2}\right) \geq \frac{0}{2},$$

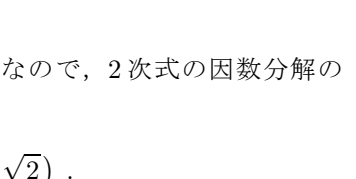
$$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0.$$

$x$  の値について場合分けして、左辺の2次式の値の符号を調べる。

$x$ の値	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < \frac{3}{2}$	$x = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x$
$x+2$ の符号	-	0	+	+	+
$x-\frac{3}{2}$ の符号	-	-	-	0	+
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ の符号	+	0	-	0	+

この表を次のように略す。

$x$	...	$-2$	...	$\frac{3}{2}$	...
$x+2$		-	0	+	+
$x-\frac{3}{2}$		-	-	-	0
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$		+	0	-	0



この表より、

$$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \iff x \leq -2 \text{ または } x \geq \frac{3}{2}.$$

故に、与えられた不等式を解くと、  $x \leq -2$  または  $x \geq \frac{3}{2}$ . 終

**問題 5.8.1** 変数を表す変数  $x$  に関する以下の不等式を解きなさい。

(1)  $3x^2+7x > 6$  .

(2)  $x+12 \geq 6x^2$  .

2次式の因数分解の公式 (3.5節) を思い起こして下さい：複素数  $a, b, c$  ( $a \neq 0$ ) について、 $x$  に関する2次方程式  $ax^2+bx+c=0$  の2つの解を  $\alpha, \beta$  とおくと、 $x$  の2次式  $ax^2+bx+c$  は次のように因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta).$$

**例題** 変数  $k$  に関する不等式  $k(6-k) > 7$  を解く。

**【解説】** 不等式  $k(6-k) > 7$  より、  $6k-k^2 > 7$  なので

$$k^2-6k+7 < 0.$$

$k$  に関する2次方程式  $k^2-6k+7=0$  の解は  $3 \pm \sqrt{2}$  なので、2次式の因数分解の公式 (3.5節) より

$$k^2-6k+7 = (k-3+\sqrt{2})(k-3-\sqrt{2}).$$

この  $k$  の2次式の値の符号を調べる。

$k$	...	$3-\sqrt{2}$	...	$3+\sqrt{2}$	...
$k-3+\sqrt{2}$		-	0	+	+
$k-3-\sqrt{2}$		-	-	-	0
$(k-3+\sqrt{2})(k-3-\sqrt{2})$		+	0	-	0

この表より

$$k^2-6k+7 < 0 \iff (k-3+\sqrt{2})(k-3-\sqrt{2}) < 0$$

$$\iff 3-\sqrt{2} < k < 3+\sqrt{2}.$$

故に、与えられた不等式を解くと  $3-\sqrt{2} < k < 3+\sqrt{2}$ . 終

**問題 5.8.2** 変数  $x$  に関する以下の不等式を解きなさい。

(1)  $x^2+4 \geq 6x$  .

(2)  $2x(x+2) < 1$  .

次に2次不等式の左辺の2次式  $ax^2+bx+c$  について  $b^2-4ac=0$  のときを扱います。このとき、定理3.4より、2次方程式  $ax^2+bx+c=0$  には実数の重解  $\alpha$  があり、2次式  $ax^2+bx+c$  は  $a(x-\alpha)^2$  の形に因数分解できます。

**例解** 変数  $x$  に関する以下の2次不等式を解きます：

$$x^2-6x+9 \geq 0, \quad x^2-6x+9 < 0, \quad x^2-6x+9 > 0, \quad x^2-6x+9 \leq 0.$$

左辺の2次式  $x^2-6x+9$  を平方完成すると

$$x^2-6x+9 = (x-3)^2.$$

$x$  がどんな実数でも  $(x-3)^2 \geq 0$  ですから、総ての実数が不等式  $(x-3)^2 \geq 0$  の解です。また、 $x$  がどんな実数でも  $(x-3)^2 \geq 0$  ですから、 $(x-3)^2 < 0$  となる実数  $x$  はありません；つまり、不等式  $(x-3)^2 < 0$  の解はありません。更に、定理5.1.3を思い起こして下さい：任意の実数  $A$  について、

$$A^2 \leq 0 \iff A = 0,$$

$$A^2 > 0 \iff A \neq 0.$$

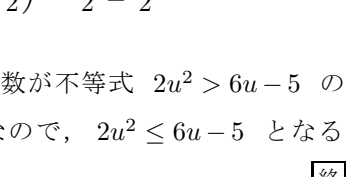
このことから、

$$(x-3)^2 \leq 0 \iff x-3=0 \iff x=3;$$

$$(x-3)^2 > 0 \iff x-3 \neq 0 \iff x \neq 3,$$

故に、不等式  $(x-3)^2 \leq 0$  を解くと  $x=3$ 、不

等式  $(x-3)^2 > 0$  を解くと  $x \neq 3$ . 終



**例題** 変数  $a$  に関する不等式  $a - \frac{a^2}{3} \geq \frac{3}{4}$  を解く。

**【解説】** 不等式  $a - \frac{a^2}{3} \geq \frac{3}{4}$  より  $-\frac{a^2}{3} + a - \frac{3}{4} \geq 0$ 、両辺に  $-3$  を掛けて

$$a^2-3a+\frac{9}{4} \leq 0,$$

この不等式の左辺は  $a^2-3a+\frac{9}{4} = \left(a-\frac{3}{2}\right)^2$  なので、

$$\left(a-\frac{3}{2}\right)^2 \leq 0.$$

よって  $a - \frac{3}{2} = 0$  なので  $a = \frac{3}{2}$  . 故に、与えられた不等式を解くと  $a = \frac{3}{2}$ . 終

**問題 5.8.3** 変数  $k$  に関する不等式  $-3k^2-2k \geq \frac{1}{3}$  を解きなさい。

**例題** 変数  $t$  に関する不等式  $2t - \frac{3}{2}t^2 < \frac{2}{3}$  を解く。

**【解説】** 不等式  $2t - \frac{3}{2}t^2 < \frac{2}{3}$  より  $-\frac{3}{2}t^2 + 2t - \frac{2}{3} < 0$ 、両辺に  $-\frac{2}{3}$  を掛けて

$$t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9} > 0,$$

この不等式の左辺は  $t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9} = \left(t - \frac{2}{3}\right)^2$  なので、

$$\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 > 0.$$

よって  $t - \frac{2}{3} \neq 0$  なので  $t \neq \frac{2}{3}$  . 故に、与えられた不等式を解くと  $t \neq \frac{2}{3}$ . 終

**問題 5.8.4** 変数  $y$  に関する不等式  $y - \frac{3}{5}y^2 < \frac{5}{12}$  を解きなさい。

最後に2次不等式の左辺の2次式  $ax^2+bx+c$  について  $b^2-4ac < 0$  のときを扱います。

**例解** 変数  $x$  に関する以下の2次不等式を解きます：

$$2x^2-8x+9 > 0, \quad 2x^2-8x+9 \leq 0, \quad 2x^2-8x+9 \geq 0, \quad 2x^2-8x+9 < 0.$$

左辺の2次式  $2x^2-8x+9$  を平方完成します：

$$\begin{aligned} 2x^2-8x+9 &= 2(x^2-4x)+9 = 2(x^2-4x+4)-8+9 \\ &= 2(x-2)^2+1. \end{aligned}$$

$x$  がどんな実数でも  $(x-2)^2 \geq 0$  なので、  $2(x-2)^2 \geq 0$ 、  $2(x-2)^2+1 \geq 1 > 0$ 、よって  $2x^2-8x+9 > 0$  . つまり、

$$\text{任意の実数 } x \text{ について } 2x^2-8x+9 > 0.$$

よって、総ての実数が不等式  $2x^2-8x+9 > 0$

の解です。また、任意の実数  $x$  について、

$2x^2-8x+9 > 0$  なので  $2x^2-8x+9 \geq 0$  で

す5)：

任意の実数  $x$  について  $2x^2-8x+9 \geq 0$  .

よって、総ての実数が不等式  $2x^2-8x+9 \geq 0$

の解になります。実数  $x$  が何であっても

$2x^2-8x+9 > 0$  ですから、  $2x^2-8x+9 \leq 0$  と

なる実数  $x$  はありません；つまり不等式  $2x^2-8x+9 \leq 0$  の解はありません。同様に、

実数  $x$  が何であっても  $2x^2-8x+9 \geq 0$  ですから、  $2x^2-8x+9 < 0$  となる実数  $x$  はありません；つまり不等式  $2x^2-8x+9 < 0$  の解はありません。 終



**例題** 変数  $u$  に関する不等式  $2u^2 > 6u-5$  及び  $2u^2 \leq 6u-5$  を解く。

**【解説】**  $2u^2 - (6u-5)$  を平方完成する：

$$\begin{aligned} 2u^2 - (6u-5) &= 2u^2 - 6u + 5 = 2(u^2 - 3u) + 5 = 2\left(u^2 - 3u + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{2} + 5 \\ &= 2\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$u$  がどんな実数でも、  $\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$  なので、  $2\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} > 0$ 、よって  $2u^2 - (6u-5) > 0$  なので、  $2u^2 > 6u-5$  .

$u$  がどんな実数でも  $2u^2 > 6u-5$  なので、総ての実数が不等式  $2u^2 > 6u-5$  の解である。また、 $u$  がどんな実数でも  $2u^2 > 6u-5$  なので、  $2u^2 \leq 6u-5$  となる実数  $u$  はない、つまり不等式  $2u^2 \leq 6u-5$  の解はない。 終

**問題 5.8.5** 変数  $x$  に関する以下の不等式を解きなさい。

(1)  $\frac{2x^2+1}{5} > \frac{x}{2}$  .

(2)  $2(x+1)^2 \leq x$  .

定数  $a, b, c$  は実数で  $a > 0$  とします。変数  $x$  に関する2次不等式

$$ax^2+bx+c < 0, \quad ax^2+bx+c \leq 0, \quad$$