

§5.8 2次不等式の解法

実数を表す定数 a, b, c (但し $a \neq 0$) に対して、変数 x に関する2次不等式

$$ax^2+bx+c < 0, \quad ax^2+bx+c \leq 0, \quad ax^2+bx+c > 0, \quad ax^2+bx+c \geq 0$$

を解きます。まず次の基本方針を憶えて下さい。

実数を表す定数 a, b, c (但し $a \neq 0$) に対して、変数 x に関する2次不等式

$$ax^2+bx+c < 0, \quad ax^2+bx+c \leq 0, \quad ax^2+bx+c > 0, \quad ax^2+bx+c \geq 0$$

を解くために、2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 b^2-4ac について、

$$b^2-4ac \geq 0 \text{ のときは左辺 } ax^2+bx+c \text{ を因数分解して、}$$

$$b^2-4ac < 0 \text{ のときは左辺 } ax^2+bx+c \text{ を平方完成する。}$$

最初に2次不等式の左辺の2次式 ax^2+bx+c について $b^2-4ac > 0$ のときを扱います。このとき、定理3.5より、2次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で1次式の積に因数分解できます。

例解 変数を表す変数 x に関する以下の2次不等式を解きます：

$$x^2-5x+4 < 0, \quad x^2-5x+4 \leq 0, \quad x^2-5x+4 > 0, \quad x^2-5x+4 \geq 0.$$

まず左辺の2次式 x^2-5x+4 を因数分解します：

$$x^2-5x+4 = (x-1)(x-4).$$

因数 $x-1, x-4$ の値の符号は次のようになります：

$$x < 1 \text{ のとき } x-1 < 0, \quad x = 1 \text{ のとき } x-1 = 0, \quad x > 1 \text{ のとき } x-1 > 0;$$

$$x < 4 \text{ のとき } x-4 < 0, \quad x = 4 \text{ のとき } x-4 = 0, \quad x > 4 \text{ のとき } x-4 > 0.$$

これらのことより、 $x=1$ のところと $x=4$ のところが符号が変わる境目になります：

$$x < 1 \text{ のとき, } x-1 < 0 \text{ かつ } x-4 < 0 \text{ なので } (x-1)(x-4) > 0;$$

$$x = 1 \text{ のとき, } x-1 = 0 \text{ なので } (x-1)(x-4) = 0;$$

$$1 < x < 4 \text{ のとき, } x-1 > 0 \text{ かつ } x-4 < 0 \text{ なので } (x-1)(x-4) < 0;$$

$$x = 4 \text{ のとき, } x-4 = 0 \text{ なので } (x-1)(x-4) = 0;$$

$$x > 4 \text{ のとき, } x-1 > 0 \text{ かつ } x-4 > 0 \text{ なので } (x-1)(x-4) > 0.$$

これらのことを次のような表で表します。

x の値	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x$
$x-1$ の値の符号	-	0	+	+	+
$x-4$ の値の符号	-	-	-	0	+
$(x-1)(x-4)$ の値の符号	+	0	-	0	+

この表から次のことが分かります：

$$(x-1)(x-4) < 0 \iff (x-1)(x-4) \text{ の符号は } - \iff 1 < x < 4;$$

$$(x-1)(x-4) \leq 0 \iff (x-1)(x-4) \text{ の符号は } - \text{ かつ } 0 \iff 1 \leq x \leq 4;$$

$$(x-1)(x-4) > 0 \iff (x-1)(x-4) \text{ の符号は } + \iff x < 1 \text{ または } x > 4;$$

$$(x-1)(x-4) \geq 0 \iff (x-1)(x-4) \text{ の符号は } + \text{ かつ } 0 \iff x \leq 1 \text{ または } x \geq 4.$$

これらのことは x の関数 $y = (x-1)(x-4)$

のグラフからも分かります。 xy 座標平面に

において、 $y = (x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸

との共有点は $(1, 0)$ と $(4, 0)$ とです。 また、

$y = (x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線

です。 $y = (x-1)(x-4)$ のとき

$$(x-1)(x-4) \leq 0 \iff y \leq 0.$$

$$y = (x-1)(x-4) \leq 0$$

従って、 $y = x^2-5x+4$ のグラフにおいて次

のようになります：

$$x \text{ 座標について } (x-1)(x-4) \leq 0 \text{ となる部分} = y \text{ 座標が } 0 \text{ 以下の部分}.$$

同様に考えると、 $y = (x-1)(x-4)$ のグラフにおいて次のようになります：

$$x \text{ 座標について } (x-1)(x-4) < 0 \text{ となる部分} = y \text{ 座標が } 0 \text{ より小さい部分},$$

$$x \text{ 座標について } (x-1)(x-4) \geq 0 \text{ となる部分} = y \text{ 座標が } 0 \text{ 以上の部分},$$

$$x \text{ 座標について } (x-1)(x-4) > 0 \text{ となる部分} = y \text{ 座標が } 0 \text{ より大きい部分}.$$

$$y = (x-1)(x-4) < 0$$

$$y = (x-1)(x-4) \geq 0$$

$$y = (x-1)(x-4) > 0$$

$$\iff 1 < x < 4$$

$$\iff x \leq 1 \text{ または } x \geq 4$$

$$\iff x < 1 \text{ または } x > 4$$

このようにして以下のことが分かります：

$$\text{不等式 } (x-1)(x-4) < 0 \text{ を解くと } 1 < x < 4,$$

$$\text{不等式 } (x-1)(x-4) \leq 0 \text{ を解くと } 1 \leq x \leq 4,$$

$$\text{不等式 } (x-1)(x-4) > 0 \text{ を解くと } x < 1 \text{ または } x > 4,$$

$$\text{不等式 } (x-1)(x-4) \geq 0 \text{ を解くと } x \leq 1 \text{ または } x \geq 4. \quad \text{終}$$

例題 変数を表す変数 x に関する不等式 $6-2x^2 \leq x$ を解く。

【解説】 不等式 $6-2x^2 \leq x$ より $-2x^2-x+6 \leq 0$ 。 x^2 の係数を正にする方が考え易いので、両辺に -1 を掛けて

$$2x^2+x-6 \geq 0.$$

左辺を因数分解すると $2x^2+x-6 = (x+2)(2x-3)$ なので

$$(x+2)(2x-3) \geq 0.$$

符号を調べるためには x の係数が 1 の方が分かりやすいので、左辺の因数 $2x-3$ を 2 で割る (同時に右辺も 2 で割る)：

$$(x+2)\left(\frac{2x-3}{2}\right) \geq \frac{0}{2},$$

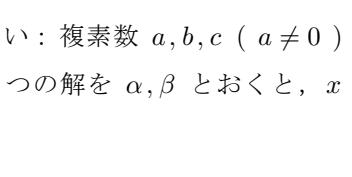
$$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0.$$

x の値について場合分けして、左辺の2次式の値の符号を調べる。

x の値	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < \frac{3}{2}$	$x = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x$
$x+2$ の値の符号	-	0	+	+	+
$x-\frac{3}{2}$ の値の符号	-	-	-	0	+
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ の値の符号	+	0	-	0	+

この表を次のように略す。

x	...	-2	...	$\frac{3}{2}$...
$x+2$	-	0	+	+	+
$x-\frac{3}{2}$	-	-	-	0	+
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$	+	0	-	0	+



この表より、

$$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \iff x \leq -2 \text{ または } x \geq \frac{3}{2}.$$

故に、与えられた不等式を解くと、 $x \leq -2$ または $x \geq \frac{3}{2}$ 。 終

問題 5.8.1 変数を表す変数 x に関する以下の不等式を解きなさい。

$$(1) 3x^2+7x > 6. \quad (2) x+12 \geq 6x^2.$$

2次式の因数分解の公式 (3.5節) を思い起こして下さい：複素数 a, b, c ($a \neq 0$) について、 x に関する2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α, β とおくと、 x の2次式 ax^2+bx+c は次のように因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta).$$

例題 変数 k に関する不等式 $k(6-k) > 7$ を解く。

【解説】 不等式 $k(6-k) > 7$ より、 $6k-k^2 > 7$ なので

$$k^2-6k+7 < 0.$$

k に関する2次方程式 $k^2-6k+7=0$ の解は $3 \pm \sqrt{2}$ なので、2次式の因数分解の公式 (3.5節) より

$$k^2-6k+7 = (k-3+\sqrt{2})(k-3-\sqrt{2}).$$

この k の2次式の値の符号を調べる。

k	...	$3-\sqrt{2}$...	$3+\sqrt{2}$...
$k-3+\sqrt{2}$	-	0	+	+	+
$k-3-\sqrt{2}$	-	-	-	0	+
$(k-3+\sqrt{2})(k-3-\sqrt{2})$	+	0	-	0	+

この表より

$$k^2-6k+7 < 0 \iff (k-3+\sqrt{2})(k-3-\sqrt{2}) < 0$$

$$\iff 3-\sqrt{2} < k < 3+\sqrt{2}.$$

故に、与えられた不等式を解くと $3-\sqrt{2} < k < 3+\sqrt{2}$ 。 終

問題 5.8.2 変数 x に関する以下の不等式を解きなさい。

$$(1) x^2+4 \geq 6x. \quad (2) 2x(x+2) < 1.$$

次に2次不等式の左辺の2次式 ax^2+bx+c について $b^2-4ac=0$ のときを扱います。このとき、定理3.4より、2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ には実数の重解 α があり、2次式 ax^2+bx+c は $a(x-\alpha)^2$ の形に因数分解できます。

例解 変数 x に関する以下の2次不等式を解きます：

$$x^2-6x+9 \geq 0, \quad x^2-6x+9 < 0, \quad x^2-6x+9 > 0, \quad x^2-6x+9 \leq 0.$$

左辺の2次式 x^2-6x+9 を因数分解すると

$$x^2-6x+9 = (x-3)^2.$$

x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ ですから、総ての実数が不等式 $(x-3)^2 \geq 0$ の解です。また、 x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ ですから、 $(x-3)^2 < 0$ となる実数 x はありません；つまり、不等式 $(x-3)^2 < 0$ の解はありません。更に、定理5.1.3を思い起こして下さい：任意の実数 A について、

$$A^2 \leq 0 \iff A = 0,$$

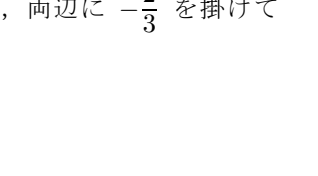
$$A^2 > 0 \iff A \neq 0.$$

このことから、

$$(x-3)^2 \leq 0 \iff x-3=0 \iff x=3,$$

$$(x-3)^2 > 0 \iff x-3 \neq 0 \iff x \neq 3,$$

故に、不等式 $(x-3)^2 \leq 0$ を解くと $x=3$ 、不等式 $(x-3)^2 > 0$ を解くと $x \neq 3$ 。 終



例題 変数 a に関する不等式 $a-\frac{a^2}{3} \geq \frac{3}{4}$ を解く。

【解説】 不等式 $a-\frac{a^2}{3} \geq \frac{3}{4}$ より $-\frac{a^2}{3}+a-\frac{3}{4} \geq 0$ 、両辺に -3 を掛けて

$$a^2-3a+\frac{9}{4} \leq 0,$$

この不等式の左辺は $a^2-3a+\frac{9}{4} = \left(a-\frac{3}{2}\right)^2$ なので、

$$\left(a-\frac{3}{2}\right)^2 \leq 0.$$

よって $a-\frac{3}{2}=0$ なので $a=\frac{3}{2}$ 。故に、与えられた不等式を解くと $a=\frac{3}{2}$ 。 終

問題 5.8.3 変数 k に関する不等式 $-3k^2-2k \geq \frac{1}{3}$ を解きなさい。

例題 変数 t に関する不等式 $2t-\frac{3}{2}t^2 < \frac{2}{3}$ を解く。

【解説】 不等式 $2t-\frac{3}{2}t^2 < \frac{2}{3}$ より $-\frac{3}{2}t^2+2t-\frac{2}{3} < 0$ 、両辺に $-\frac{2}{3}$ を掛けて

$$t^2-\frac{4}{3}t+\frac{4}{9} > 0,$$

この不等式の左辺は $t^2-\frac{4}{3}t+\frac{4}{9} = \left(t-\frac{2}{3}\right)^2$ なので、

$$\left(t-\frac{2}{3}\right)^2 > 0.$$

よって $t-\frac{2}{3} \neq 0$ なので $t \neq \frac{2}{3}$ 。故に、与えられた不等式を解くと $t \neq \frac{2}{3}$ 。 終

問題 5.8.4 変数 y に関する不等式 $y-\frac{3}{5}y^2 < \frac{5}{12}$ を解きなさい。

最後に2次不等式の左辺の2次式 ax^2+bx+c について $b^2-4ac < 0$ のときを扱います。

例解 変数 x に関する以下の2次不等式を解きます：

$$2x^2-8x+9 > 0, \quad 2x^2-8x+9 \leq 0, \quad 2x^2-8x+9 \geq 0, \quad 2x^2-8x+9 < 0.$$

左辺の2次式 $2x^2-8x+9$ を平方完成します：

$$2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x)+9 = 2(x^2-4x+4)-8+9 = 2(x-2)^2+1.$$

x がどんな実数でも、 $(x-2)^2 \geq 0$ なので、

$$2(x-2)^2 \geq 0, \quad 2(x-2)^2+1 \geq 1 > 0, \quad \text{よって}$$

$$2x^2-8x+9 > 0. \quad \text{つまり、}$$

$$\text{任意の実数 } x \text{ について } 2x^2-8x+9 > 0.$$

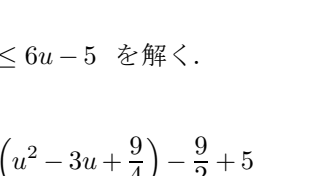
よって、総ての実数が不等式 $2x^2-8x+9 > 0$

の解です。また、任意の実数 x について、

$$2x^2-8x+9 > 0 \text{ なので } 2x^2-8x+9 \geq 0 \text{ です}^5):$$

$$\text{任意の実数 } x \text{ について } 2x^2-8x+9 \geq 0.$$

よって、総ての実数が不等式 $2x^2-8x+9 \geq 0$ の解になります。実数 x が何であっても $2x^2-8x+9 > 0$ ですから、 $2x^2-8x+9 \leq 0$ となる実数 x はありません；つまり不等式 $2x^2-8x+9 \leq 0$ の解はありません。同様に、実数 x が何であっても $2x^2-8x+9 \geq 0$ ですから、 $2x^2-8x+9 < 0$ となる実数 x はありません；つまり不等式 $2x^2-8x+9 < 0$ の解はありません。 終



例題 変数 u に関する不等式 $2u^2 > 6u-5$ 及び $2u^2 \leq 6u-5$ を解く。

【解説】 $2u^2-(6u-5)$ を平方完成する：

$$\begin{aligned} 2u^2-(6u-5) &= 2u^2-6u+5 = 2(u^2-3u)+5 = 2\left(u^2-3u+\frac{9}{4}\right) - \frac{9}{2} + 5 \\ &= 2\left(u-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

u がどんな実数でも、 $\left(u-\frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$ なので、 $2\left(u-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} > 0$ 、よって $2u^2-(6u-5) > 0$ なので、 $2u^2 > 6u-5$ 。

u がどんな実数でも $2u^2 > 6u-5$ なので、総ての実数が不等式 $2u^2 > 6u-5$ の解である。また、 u がどんな実数でも $2u^2 > 6u-5$ なので、 $2u^2 \leq 6u-5$ となる実数 u はない、つまり不等式 $2u^2 \leq 6u-5$ の解はない。 終

問題 5.8.5 変数 x に関する以下の不等式を解きなさい。

$$(1) \frac{2x^2+1}{5} > \frac{x}{2}. \quad (2) 2(x+1)^2 \leq x.$$

定数 a, b, c は実数で $a > 0$ とします。変数 x に関する2次不等式

$$ax^2+bx+c < 0, \quad ax^2+bx+c \leq 0, \quad ax^2+bx+c > 0, \quad ax^2+bx+c \geq 0$$

の解法をまとめます。

まず $b^2-4ac > 0$ とします。定理3.4より2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ には異なる2つの実数解 α, β があります。2次式の因数分解の公式 (3.5節) より

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta).$$

この因数分解された2次式 $a(x-\alpha)(x-\beta)$ の値の符号を調べます。 $\alpha < \beta$ とします。 $a > 0$ に注意して下さい