

## 第5章の補遺1 分数式が現れる不等式の解法

分数式が現れる不等式のうち簡単なものを解きます。

**例解** 変数  $x$  に関する不等式  $\frac{3x}{x-4} < 2$  を解きます。左辺の分数式の分母  $x-4$  を両辺に掛けて分母を払いたいところですが、それには問題があります。実数  $a, b, c$  について、法則 1.5.3 及び定理 1.5.5 より、

$$a < b \text{ ならば, } \begin{cases} c > 0 \text{ のとき } ac < bc \\ c < 0 \text{ のとき } ac > bc \end{cases}$$

このことより、不等式  $\frac{3x}{x-4} < 2$  の両辺に  $x-4$  を掛けると、 $x-4 > 0$  のときは  $3x < 2(x-4)$  で、 $x-4 < 0$  のときは  $3x > 2(x-4)$  です。予め  $x-4 > 0$  か  $x-4 < 0$  かは分かりませんから、不等式  $\frac{3x}{x-4} < 2$  の両辺に  $x-4$  を掛けたとき  $3x < 2(x-4)$  なのか  $3x > 2(x-4)$  なのか分かりません<sup>6)</sup>。ですから別の解法を考えます。

不等式  $\frac{3x}{x-4} < 2$  を解くために、左辺から右辺を引きます：

$$\frac{3x}{x-4} - 2 = \frac{3x}{x-4} - \frac{2(x-4)}{x-4} = \frac{3x - 2(x-4)}{x-4} = \frac{x+8}{x-4};$$

そして不等式を次のように同値変形します：

$$\frac{3x}{x-4} < 2 \iff \frac{3x}{x-4} - 2 < 0 \iff \frac{x+8}{x-4} < 0.$$

このことより、与えられた不等式  $\frac{3x}{x-4} < 2$  と同値な不等式  $\frac{x+8}{x-4} < 0$  を解きます。

そのために、次のような表を作って分数式  $\frac{x+8}{x-4}$  の値の符号を調べます。 $x=4$  のとき、 $x-4=0$  なので、分数式  $\frac{x+8}{x-4}$  の値はありません。

$x$ の値	$x < -8$	$x = -8$	$-8 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x$
$x+8$ の値の符号	-	0	+	+	+
$x-4$ の値の符号	-	-	-	0	+
$\frac{x+8}{x-4}$ の値の符号	+	0	-	値なし	+

この表より、

$$\frac{x+8}{x-4} < 0 \iff -8 < x < 4.$$

故に、与えられた不等式  $\frac{3x}{x-4} < 2$  を解くと  $-8 < x < 4$  .

**終**

**例題** 変数  $x$  に関する不等式  $\frac{4x-13}{2x-3} \leq 3$  を解く。

【解説】

$$\frac{4x-13}{2x-3} - 3 = \frac{4x-13-3(2x-3)}{2x-3} = \frac{-2x-4}{2x-3} = -2 \cdot \frac{x+2}{2x-3},$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{4x-13}{2x-3} \leq 3 &\iff \frac{4x-13}{2x-3} - 3 \leq 0 \iff -2 \cdot \frac{x+2}{2x-3} \leq 0 \\ &\iff \frac{x+2}{2x-3} \geq 0. \end{aligned}$$

不等式  $\frac{x+2}{2x-3} \geq 0$  を解く。分数式  $\frac{x+2}{2x-3}$  の値の符号を調べて表を作る。

$x$ の値	...	-2	...	$\frac{3}{2}$	...
$x+2$ の値の符号	-	0	+	+	+
$2x-3$ の値の符号	-	-	-	0	+
$\frac{x+2}{2x-3}$ の値の符号	+	0	-	値なし	+

この表より、不等式  $\frac{x+2}{2x-3} \geq 0$  を解くと、 $x \leq -2$  または  $x > \frac{3}{2}$  .

故に、与えられた不等式を解くと、 $x \leq -2$  または  $x > \frac{3}{2}$  .

**終**

**問題 5.補遺1** 変数  $x$  に関する以下の不等式を解きなさい。

$$(1) \frac{5}{x+1} < 2. \quad (2) \frac{3x-13}{2x-3} \geq 3. \quad (3) \frac{7x-8}{3x+2} \geq 1.$$

<sup>6)</sup> 例えば不等式  $\frac{x+4}{3} < 2$  では、 $3 > 0$  と分かっていますから、 $\frac{x+4}{3} < 2$  の両辺に 3 を掛けて不等式  $x+4 < 6$  が導かれます。