

第5章の補遺3 3次不等式の解法

3次不等式を解くためには、3次式を実数係数の範囲で因数分解することが基本になります。

例題 変数 y に関する3次不等式 $6y^3 + y^2 - 10y + 3 > 0$ 及び $6y^3 + y^2 - 10y + 3 \geq 0$ を解く。

【解説】 $y = 1$ のとき $6y^3 + y^2 - 10y + 3 = 0$ なので、因数定理より、整式 $6y^3 + y^2 - 10y + 3$ は $y - 1$ で割り切れる：

$$6y^3 + y^2 - 10y + 3 = (y - 1)(6y^2 + 7y - 3).$$

y に関する2次方程式 $6y^2 + 7y - 3 = 0$ を解くと $y = \frac{1}{3}, -\frac{3}{2}$ ，従って、 y の2次式 $6y^2 + 7y - 3$ は実数係数の範囲で因数分解できて

$$6y^2 + 7y - 3 = 6\left(y - \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right).$$

故に、 y の3次式 $6y^3 + y^2 - 10y + 3$ を実数係数の範囲で因数分解すると

$$6y^3 + y^2 - 10y + 3 = 6(y - 1)\left(y - \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right).$$

y の値について場合分けして、 $6y^3 + y^2 - 10y + 3 = 6(y - 1)\left(y - \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right)$ の値の符号を調べる。

y の値	...	$-\frac{3}{2}$...	$\frac{1}{3}$...	1	...
$y + \frac{3}{2}$ の値の符号	-	0	+	+	+	+	+
$y - \frac{1}{3}$ の値の符号	-	-	-	0	+	+	+
$y - 1$ の値の符号	-	-	-	-	-	0	+
$6(y - 1)\left(y - \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right)$ の値の符号	-	0	+	0	-	0	+

この表より、

y に関する不等式 $6y^3 + y^2 - 10y + 3 > 0$ を解くと $-\frac{3}{2} < y < \frac{1}{3}$ または $y > 1$ ，

y に関する不等式 $6y^3 + y^2 - 10y + 3 \geq 0$ を解くと $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{1}{3}$ または $y \geq 1$ 。

終

問題5.補遺3.1 変数 x に関する以下の不等式を解きなさい。

$$(1) x^3 + 3 \geq \frac{x}{2}(5x + 1). \quad (2) 3x^2(x - 3) < 2x(x + 2).$$

例題 変数 x に関する3次不等式 $x^3 - 3x - 2 > 0$ 及び $x^3 - 3x - 2 \geq 0$ を解く。

【解説】 $x = -1$ のとき $x^3 - 3x - 2 = 0$ なので、因数定理より、整式 $x^3 - 3x - 2$ は $x + 1$ で割り切れる：

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2).$$

2次式 $x^2 - x - 2$ は実数係数の範囲で更に因数分解できる： $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ 。従って、 x の3次式 $x^3 - 3x - 2$ を実数係数の範囲で因数分解すると

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x - 2)(x + 1) = (x + 1)^2(x - 2).$$

x の値について場合分けして、 $x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$ の値の符号を調べる。

x の値	...	-1	...	2	...
$(x + 1)^2$ の値の符号	+	0	+	+	+
$x - 2$ の値の符号	-	-	-	0	+
$(x + 1)^2(x - 2)$ の値の符号	-	0	-	0	+

従って、

x に関する不等式 $x^3 - 3x - 2 > 0$ を解くと $2 < x$ ，

x に関する不等式 $x^3 - 3x - 2 \geq 0$ を解くと $x = -1$ または $2 \leq x$ 。

終

問題5.補遺3.2 変数 x に関する不等式 $x(x^2 - 7) > (x + 4)(x - 3)$ を解きなさい。

文字 x が現れる式 $f(x)$ ， $g(x)$ について、例えば $f(x)g(x) > 0$ とします。仮に、任意の実数 x について $g(x) > 0$ ならば、不等式 $f(x)g(x) > 0$ の両辺を $g(x)$ で割ることができます。

例題 変数 u に関する3次不等式 $u^3 + 2u > 3(u - 2)$ を解く。

【解説】 与えられた不等式 $u^3 + 2u > 3(u - 2)$ を整理すると

$$u^3 - u + 6 > 0.$$

$u = -2$ のとき $u^3 - u + 6 = 0$ なので、因数定理より、整式 $u^3 - u + 6$ は $u + 2$ で割り切れる：

$$u^3 - u + 6 = (u + 2)(u^2 - 2u + 3).$$

不等式 $(u + 2)(u^2 - 2u + 3) > 0$ を解く。 u に関する2次方程式 $u^2 - 2u + 3 = 0$ の判別式の値は $2^2 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$ なので、定理5.4より、

$$\text{任意の実数 } u \text{ について } u^2 - 2u + 3 > 0.$$

つまり、 u の値に関わらず $u^2 - 2u + 3$ の値は常に正である。従って、不等式

$$(u + 2)(u^2 - 2u + 3) > 0$$

の両辺を $u^2 - 2u + 3$ で割ることができて、 $u + 2 > 0$ ，つまり $u > -2$ 。故に、与えられた不等式を解くと $u > -2$ 。

終

問題5.補遺3.3 変数 x に関する不等式 $\frac{x^2}{3}(x - 2) \leq \frac{x - 1}{2}$ を解きなさい。