

第5章の補遺4 分数式が現れる不等式の解法

例題 実数 x に関する不等式 $\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{4x-2}$ を解く.

【解説】

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{4x-2} &\iff \frac{2}{x+1} - \frac{3}{2(2x-1)} \geq 0 \iff \frac{5x-7}{2(x+1)(2x-1)} \geq 0 \\ &\iff \frac{5x-7}{(x+1)(2x-1)} \geq 0. \end{aligned}$$

不等式 $\frac{5x-7}{(x+1)(2x-1)} \geq 0$ を解く. x の分数式 $\frac{5x-7}{(x+1)(2x-1)}$ の値の符号を調べる. $x = -1$ のときと $x = \frac{1}{2}$ のときは, $(x+1)(2x-1) = 0$ なので, 分数式

$\frac{5x-7}{(x+1)(2x-1)}$ の値はないことに注意する.

x の値	...	-1	...	$\frac{1}{2}$...	$\frac{7}{5}$...
$x+1$ の符号	-	0	+	+	+	+	+
$2x-1$ の符号	-	-	-	0	+	+	+
$5x-7$ の符号	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{5x-7}{(x+1)(2x-1)}$ の符号	-	値なし	+	値なし	-	0	+

従って, 不等式 $\frac{5x-7}{(x+1)(2x-1)} \geq 0$ を解くと, $-1 < x < \frac{1}{2}$ または $x \geq \frac{7}{5}$. つまり, 与えられた不等式を解くと, $-1 < x < \frac{1}{2}$ または $x \geq \frac{7}{5}$. [終]

問題 5.補遺4 実数 x に関する以下の不等式を解きなさい.

$$(1) \frac{4}{3x+1} \leq \frac{2}{x-2}. \quad (2) \frac{15}{x-1} \geq 2x-1.$$