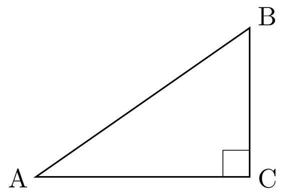
§6.0　ピタゴラスの定理

まずピタゴラスの定理[1]を思い起こして下さい．

定理（ピタゴラスの定理）　相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において角 ACB が直角であるとき，

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 \ .$$



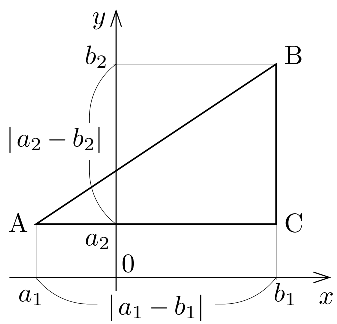
ピタゴラスの定理より次の定理が導かれます．

定理 6.0　座標平面において，点 $\mathrm{A} = (a_1, a_2)$ と点 $\mathrm{B} = (b_1, b_2)$ とを結ぶ線分 AB の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$ は

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \ .$$

証明　点 $\mathrm{A} = (a_1, a_2)$ 及び点 $\mathrm{B} = (b_1, b_2)$ に対して，座標平面の点 $\mathrm{C} = (b_1, a_2)$ をとる． 線分 AC は x 軸と平行であり，線分 BC は y 軸と平行である． よって，三角形 ABC は $\angle\mathrm{ACB}$ を直角とする直角三角形である． 従って，ピタゴラスの定理より，

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 \ .$$



$\mathrm{A} = (a_1, a_2)$ ，$\mathrm{C} = (b_1, a_2)$ なので，定理 1.7.6 より $\overline{\mathrm{AC}} = |a_1 - b_1|$ ，定理 1.7.4 より

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = |a_1 - b_1|^2 = (a_1 - b_1)^2 \ .$$

$\mathrm{B} = (b_1, b_2)$ ，$\mathrm{C} = (b_1, b_2)$ なので，定理 1.7.6 より $\overline{\mathrm{BC}} = |a_2 - b_2|$ ，定理 1.7.4 より

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = |a_2 - b_2|^2 = (a_2 - b_2)^2 \ .$$

故に，

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \ .$$

（証明終り）

---

[1] 三平方の定理ともいいます． ピタゴラス (Pythagoras) は紀元前5世紀頃の古代ギリシャの数学者・自然哲学者です．