

§6.1 鋭角の三角比

相異なる3点 A_1, B_1, C_1 を頂点とする三角形 $A_1B_1C_1$ と、相異なる3点 A_2, B_2, C_2 を頂点とする三角形 $A_2B_2C_2$ とについて、

$$\angle A_1 = \angle A_2, \quad \angle C_1 = \angle C_2 = 90^\circ$$

とします。このとき三角形 $A_1B_1C_1$ と $A_2B_2C_2$ とは相似です。三角形 $A_1B_1C_1$ に対する三角形

$A_2B_2C_2$ の相似比を r とおきます。三角形 $A_2B_2C_2$ は三角形 $A_1B_1C_1$ の r 倍ですから、

$$\overline{A_2B_2} = r\overline{A_1B_1}, \quad \overline{B_2C_2} = r\overline{B_1C_1},$$

これより

$$\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{r\overline{B_1C_1}}{r\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{A_1B_1}}.$$

同様にして次の等式が導かれます：

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{B_1A_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{B_2A_2}}, \quad \frac{\overline{C_1B_1}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{C_2B_2}}{\overline{A_2C_2}}.$$

こうして次のことが分かります：相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\angle C = 90^\circ$ であるとき、内角 $\angle A$ の大きさを決めれば、 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}$, $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$ の

各々の値は三角形 ABC の大きさと無関係に唯一つに決まる。そこで、 $\angle C = 90^\circ$ である直角三角形 ABC の内角の

大きさ $\angle A$ に対して、 $\angle A$ の正弦 $\sin \angle A$ と、 $\angle A$ の余弦 $\cos \angle A$ と、 $\angle A$ の正接 $\tan \angle A$ とを次のように定義します：

$$\sin \angle A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \quad \cos \angle A = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}, \quad \tan \angle A = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}.$$

直角三角形の内角の大きさに対するこのような辺の長さの比（の値）を三角比といいます。

相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABD は正三角形であるとします。辺 \overline{AD} の中点を C とおきます。 $\overline{AC} = a > 0$ とおきます。

$$\overline{CD} = \overline{AC} = a,$$

よって

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = a + a = 2a.$$

三角形 ABD は正三角形なので、

$$\overline{AB} = \overline{AD} = 2a > 0.$$

$\angle ACB = 90^\circ$ ですから、直角三角形 ABC において、ピタゴラスの定理より、

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2,$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2.$$

$\overline{AC} = a$, $\overline{AB} = 2a$ ですから、

$$\overline{BC}^2 = (2a)^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2,$$

$a > 0$ なので

$$\overline{BC} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a.$$

こうして、直角三角形 ABC について次のことが分かります：

$$\overline{AB} = 2a, \quad \overline{BC} = \sqrt{3}a, \quad \overline{AC} = a.$$

三角形 ABD 直角三角形 ABC において $\angle C = 90^\circ$,

$\angle A = 60^\circ$ なので、正弦・余弦・正接の定義より次の式が導かれます：

$$\sin 60^\circ = \sin \angle A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^\circ = \cos \angle A = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\tan 60^\circ = \tan \angle A = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}.$$

更に、直角三角形 ABC において $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$ なので、

$$\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

従って正弦・余弦・正接の定義より次の式が導かれます：

$$\sin 30^\circ = \sin \angle B = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \cos \angle B = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\tan 30^\circ = \tan \angle B = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 90^\circ$ とします。

$$\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ = \angle A,$$

従って直角三角形 ABC は二等辺三角形ですから、 $\overline{AC} = \overline{BC}$. $\overline{AC} = \overline{BC} = a > 0$ とおきます。ピタゴラスの定理より

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,$$

$a > 0$ なので、

$$\overline{AB} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

こうして次のことが導かれます：

$$\sin 45^\circ = \sin \angle A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos 45^\circ = \cos \angle A = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan 45^\circ = \tan \angle A = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{a} = 1.$$

以上の結果をまとめておきます：

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 45^\circ = 1;$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

直角三角形の内角の大きさと1つの辺の長さが分かれば、三角比の値を用いて、他の2つの辺の長さを求めることができます。

【例題】 相異なる3点 P, Q, R を頂点とする三角形 PQR において、 $\angle P = 90^\circ$ かつ $\angle Q = 60^\circ$ かつ $\overline{PR} = 5\sqrt{3}$ とする。他の2辺の長さ \overline{PQ} , \overline{QR} を求める。

【解説】 正弦の定義より

$$\frac{\overline{RP}}{\overline{QR}} = \sin \angle Q = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

従って

$$\overline{QR} = \frac{\overline{PR}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \overline{PR} = \frac{2}{\sqrt{3}} 5\sqrt{3} = 10.$$

また、ピタゴラスの定理より、

$$\overline{PQ}^2 = \overline{QR}^2 - \overline{PR}^2 = 100 - 75 = 25.$$

$\overline{PQ} \geq 0$ なので $\overline{PQ} = 5$. [終]

【問題 6.1.1】 相異なる3点 P, Q, R を頂点とする三角形 PQR において、 $\angle Q = 90^\circ$ かつ $\angle P = 30^\circ$ かつ $\overline{PQ} = \sqrt{6}$ とします。他の2辺の長さ \overline{PR} , \overline{QR} を求めなさい。

【例題】 相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\angle A = 90^\circ$ かつ $\cos \angle C = \frac{2}{3}$ かつ $\overline{BC} = 6$ とする。他の2辺の長さ \overline{AB} , \overline{AC} を求める。

【解説】 余弦の定義より

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \cos \angle C = \frac{2}{3},$$

従って

$$\overline{AC} = \frac{2}{3} \overline{BC} = \frac{2}{3} \times 6 = 4.$$

また、ピタゴラスの定理より、

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = 6^2 - 4^2 = 20.$$

$\overline{AB} \geq 0$ なので、 $\overline{AB} = \sqrt{20}$. [終]

【問題 6.1.2】 相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\angle B = 90^\circ$ かつ $\overline{AC} = 8$ かつ $\sin \angle A = \frac{3}{4}$ とします。他の2辺の長さ \overline{AB} , \overline{BC} を求めなさい。

