

§6.1 鋭角の三角比

角度 34° や 67° などを表す変数にしばしばギリシャ文字の θ などを用います。

相異なる 3 点 A_1, B_1, C_1 を頂点とする三角形 $A_1B_1C_1$ と、相異なる 3 点 A_2, B_2, C_2 を頂点とする三角形 $A_2B_2C_2$ について、

$$\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_2C_2, \quad \angle A_1C_1B_1 = \angle A_2C_2B_2 = 90^\circ$$

とします。このとき三角形 $A_1B_1C_1$ と $A_2B_2C_2$

とは相似です。三角形 $A_1B_1C_1$ に対する三角

形 $A_2B_2C_2$ の相似比を r とおきます。三角形

$A_2B_2C_2$ は三角形 $A_1B_1C_1$ の r 倍ですから、

$$\overline{A_2B_2} = r\overline{A_1B_1}, \quad \overline{B_2C_2} = r\overline{B_1C_1},$$

これより

$$\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{r\overline{B_1C_1}}{r\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{A_1B_1}}.$$

同様にして次の等式が導かれます：

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{A_2B_2}}, \quad \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{A_2C_2}}.$$

相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC にお

いて $\angle ACB = 90^\circ$ とします。内角 BAC の大きさ $\angle BAC$

を決めれば、 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ の各々の値は三角形 ABC

の大きさに関わらず唯一つに決まります。角度 $\theta = \angle BAC$

に対して、 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ の値を θ の正弦 (sine) といい $\sin\theta$ と書

き表し、 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ の値を θ の余弦 (cosine) といい $\cos\theta$ と書

き表し、 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ の値を θ の正接 (tangent) といい $\tan\theta$ と書き表します；

$$\sin\theta = \sin\angle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \quad \cos\theta = \cos\angle BAC = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}, \quad \tan\theta = \tan\angle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

直角三角形の内角の大きさに対するこのような辺の長さの比 (の値) を三角比とい

います。

相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形

ABD は正三角形であるとします。辺 \overline{AD} の中

点を C とおきます。 $\overline{AC} = a > 0$ とおきます。

$$\overline{CD} = \overline{AC} = a,$$

よって

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = a + a = 2a.$$

三角形 ABD は正三角形ですから、

$$\overline{AB} = \overline{AD} = 2a > 0.$$

$\angle ACB = 90^\circ$ なので、直角三角形 ABC において、ピタゴラスの定理より、

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2,$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2.$$

$\overline{AC} = a$, $\overline{AB} = 2a$ なので、

$$\overline{BC}^2 = (2a)^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2,$$

$a > 0$ なので

$$\overline{BC} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a.$$

こうして、直角三角形 ABC について次のことが分かります：

$$\overline{AB} = 2a, \quad \overline{BC} = \sqrt{3}a, \quad \overline{AC} = a.$$

三角形 ABD 直角三角形 ABC において $\angle ACB = 90^\circ$,

$\angle BAC = 60^\circ$ なので、正弦・余弦・正接の定義より以下

の式が導かれます：

$$\sin 60^\circ = \sin\angle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^\circ = \cos\angle BAC = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\tan 60^\circ = \tan\angle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}.$$

更に、直角三角形 ABC において $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$ なので、

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle ACB - \angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

従って正弦・余弦・正接の定義より以下の式が導か

れます：

$$\sin 30^\circ = \sin\angle ABC = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \cos\angle ABC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\tan 30^\circ = \tan\angle ABC = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について $\angle BAC = 45^\circ$,

$\angle ACB = 90^\circ$ とします。

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle ACB - \angle BAC = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ = \angle BAC,$$

従って直角三角形 ABC は二等辺三角形ですから、 $\overline{AC} = \overline{BC}$. $\overline{AC} = \overline{BC} = a > 0$

とおきます。ピタゴラスの定理より

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,$$

$a > 0$ なので、

$$\overline{AB} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

こうして以下の式が導かれます：

$$\sin 45^\circ = \sin\angle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos 45^\circ = \cos\angle BAC = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan 45^\circ = \tan\angle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{a}{a} = 1.$$

以上の結果をまとめておきます：

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 45^\circ = 1;$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

直角三角形の内角の大きさと一辺の長さが分かれば、三角比の値を用いて、他の二

辺の長さを求めることができます。

【例題】 相異なる 3 点 P, Q, R を頂点とする三角形 PQR において、 $\angle QPR = 90^\circ$ かつ

$\angle PQR = 60^\circ$ かつ $\overline{PR} = 5\sqrt{3}$ とする。他の 2 辺の長さ \overline{PQ} , \overline{QR} を求める。

【解説】 正弦の定義より

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}} = \sin\angle PQR = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

従って

$$\overline{QR} = \frac{\overline{PR}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{PR} = \frac{2}{\sqrt{3}}5\sqrt{3} = 10.$$

また、ピタゴラスの定理より、

$$\overline{PQ}^2 = \overline{QR}^2 - \overline{PR}^2 = 100 - 75 = 25.$$

$\overline{PQ} \geq 0$ なので $\overline{PQ} = 5$.

終

【問題 6.1.1】 相異なる 3 点 P, Q, R を頂点とする三角形 PQR において、

$\angle PQR = 90^\circ$ かつ $\angle QPR = 30^\circ$ かつ $\overline{PQ} = \sqrt{6}$ とします。他の 2 辺の長さ \overline{PR} ,

\overline{QR} を求めなさい。

【例題】 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\angle BAC = 90^\circ$ かつ

$\cos\angle ACB = \frac{2}{3}$ かつ $\overline{BC} = 6$ とする。他の 2 辺の長さ \overline{AB} , \overline{AC} を求める。

【解説】 余弦の定義より

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \cos\angle ACB = \frac{2}{3},$$

従って

$$\overline{AC} = \frac{2}{3}\overline{BC} = \frac{2}{3} \times 6 = 4.$$

また、ピタゴラスの定理より、

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = 6^2 - 4^2 = 20.$$

$\overline{AB} \geq 0$ なので、 $\overline{AB} = \sqrt{20}$.

終

【問題 6.1.2】 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\angle ABC = 90^\circ$

かつ $\overline{AC} = 8$ かつ $\sin\angle BAC = \frac{3}{4}$ とします。他の 2 辺の長さ \overline{AB} , \overline{BC} を求めな

さい。

