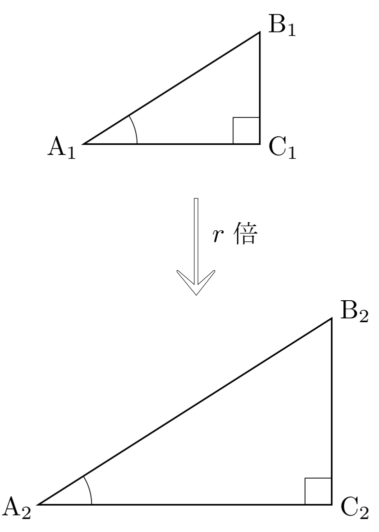
§6.1　鋭角の三角比

相異なる3点 A_1, B_1, C_1 を頂点とする三角形 $A_1B_1C_1$ と，相異なる3点 A_2, B_2, C_2 を頂点とする三角形 $A_2B_2C_2$ とについて，

$$\angle A_1 = \angle A_2\ ,\qquad \angle C_1 = \angle C_2 = 90^\circ$$

とします．このとき三角形 $A_1B_1C_1$ と $A_2B_2C_2$ とは相似です．三角形 $A_1B_1C_1$ に対する三角形 $A_2B_2C_2$ の相似比を r とおきます．三角形 $A_2B_2C_2$ は三角形 $A_1B_1C_1$ の r 倍ですから，

$$\overline{A_2B_2} = r\,\overline{A_1B_1}\ ,\qquad \overline{B_2C_2} = r\,\overline{B_1C_1}\ ,$$



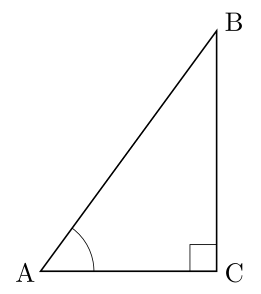
これより

$$\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{r\,\overline{B_1C_1}}{r\,\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{A_1B_1}}\ .$$

同様にして次の等式が導かれます：

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{B_1A_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{B_2A_2}}\ ,\qquad \frac{\overline{C_1B_1}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{C_2B_2}}{\overline{A_2C_2}}\ .$$

こうして次のことが分かります：相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\angle C = 90^\circ$ であるとき，内角 $\angle A$ の大きさを決めれば，$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BA}}, \dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$ の各々の値は三角形 ABC の大きさと無関係に唯一つに決まる．そこで，$\angle C = 90^\circ$ である直角三角形 ABC の内角の大きさ $\angle A$ に対して，$\angle A$ の正弦 $\sin\angle A$ と，$\angle A$ の余弦 $\cos\angle A$ と，$\angle A$ の正接 $\tan\angle A$ とを次のように定義します：

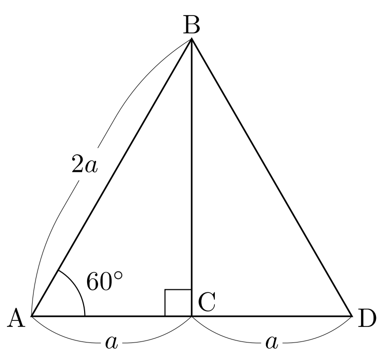


$$\sin\angle A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\ ,\qquad \cos\angle A = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}\ ,\qquad \tan\angle A = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}\ .$$

直角三角形の内角の大きさに対するこのような辺の長さの比（の値）を三角比といいます．

相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABD は正三角形であるとします．辺 $\overline{AD}$ の中点を C とおきます．$\overline{AC} = a > 0$ とおきます．

$$\overline{CD} = \overline{AC} = a\ ,$$



よって

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = a + a = 2a\ .$$

三角形 ABD は正三角形なので，

$$\overline{AB} = \overline{AD} = 2a > 0\ .$$

$\angle ACB = 90^\circ$ ですから，直角三角形 ABC において，ピタゴラスの定理より，

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2\ ,$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2\ .$$

$\overline{AC} = a$ ，$\overline{AB} = 2a$ ですから，

$$\overline{BC}^2 = (2a)^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2\ ,$$

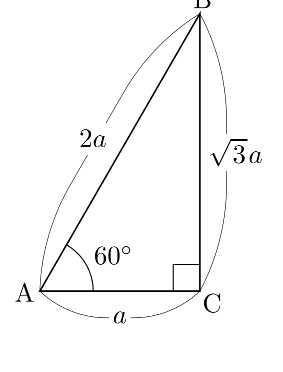
$a > 0$ なので

$$\overline{BC} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}\,a\ .$$

こうして，直角三角形 ABC について次のことが分かります：

$$\overline{AB} = 2a\ ,\qquad \overline{BC} = \sqrt{3}\,a\ ,\qquad \overline{AC} = a\ .$$

三角形 ABD 直角三角形 ABC において $\angle C = 90^\circ$ ，$\angle A = 60^\circ$ なので，正弦・余弦・正接の定義より次の式が導かれます：



$$\sin 60^\circ = \sin\angle A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

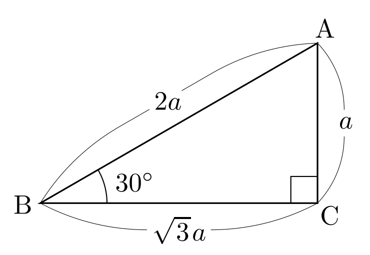
$$\cos 60^\circ = \cos\angle A = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}\ ;$$

$$\tan 60^\circ = \tan\angle A = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}\ .$$

更に，直角三角形 ABC において $\angle C = 90^\circ$ ，$\angle A = 60^\circ$ なので，

$$\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ\ .$$

従って正弦・余弦・正接の定義より次の式が導かれます：



$$\sin 30^\circ = \sin\angle B = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}\ ;$$

$$\cos 30^\circ = \cos\angle B = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

$$\tan 30^\circ = \tan\angle B = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ .$$

相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について $\angle A = 45^\circ$ ，$\angle C = 90^\circ$ とします．

$$\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ = \angle A\ ,$$

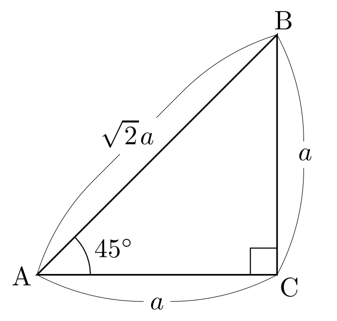
従って直角三角形 ABC は二等辺三角形ですから，$\overline{AC} = \overline{BC}$ ．$\overline{AC} = \overline{BC} = a > 0$ とおきます．ピタゴラスの定理より

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2\ ,$$

$a > 0$ なので，

$$\overline{AB} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}\ .$$

こうして次のことが導かれます：



$$\sin 45^\circ = \sin\angle A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$

$$\cos 45^\circ = \cos\angle A = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$

$$\tan 45^\circ = \tan\angle A = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{a} = 1\ .$$

以上の結果をまとめておきます：

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\ ,\qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\ ;$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\qquad \tan 45^\circ = 1\ ;$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\ ,\qquad \tan 60^\circ = \sqrt{3}\ .$$

直角三角形の内角の大きさと1つの辺の長さが分かれば，三角比の値を用いて，他の2つの辺の長さを求めることができます．

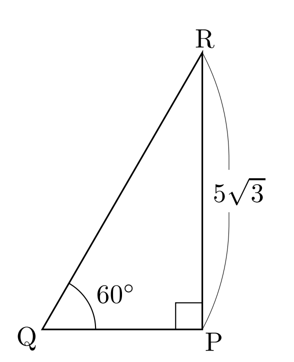
例題　相異なる3点 P, Q, R を頂点とする三角形 PQR において，$\angle P = 90^\circ$ かつ $\angle Q = 60^\circ$ かつ $\overline{PR} = 5\sqrt{3}$ とする．他の2辺の長さ $\overline{PQ}, \overline{QR}$ を求める．

［解説］　正弦の定義より

$$\frac{\overline{RP}}{\overline{QR}} = \sin\angle Q = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$

従って

$$\overline{QR} = \frac{\overline{PR}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\overline{PR} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,5\sqrt{3} = 10\ .$$



また，ピタゴラスの定理より，

$$\overline{PQ}^2 = \overline{QR}^2 - \overline{PR}^2 = 100 - 75 = 25\ .$$

$\overline{PQ} \geq 0$ なので $\overline{PQ} = 5$ ．　　終

問題 6.1.1　相異なる3点 P, Q, R を頂点とする三角形 PQR において，$\angle Q = 90^\circ$ かつ $\angle P = 30^\circ$ かつ $\overline{PQ} = \sqrt{6}$ とします．他の2辺の長さ $\overline{PR}, \overline{QR}$ を求めなさい．

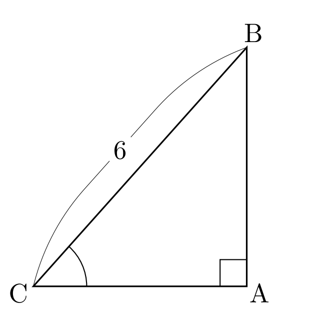
例題　相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\angle A = 90^\circ$ かつ $\cos\angle C = \dfrac{2}{3}$ かつ $\overline{BC} = 6$ とする．他の2辺の長さ $\overline{AB}, \overline{AC}$ を求める．

［解説］　余弦の定義より

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \cos\angle C = \frac{2}{3}\ ,$$

従って

$$\overline{AC} = \frac{2}{3}\,\overline{BC} = \frac{2}{3} \times 6 = 4\ .$$



また，ピタゴラスの定理より，

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = 6^2 - 4^2 = 20\ .$$

$\overline{AB} \geq 0$ なので，$\overline{AB} = \sqrt{20}$ ．　　終

問題 6.1.2　相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\angle B = 90^\circ$ かつ $\overline{AC} = 8$ かつ $\sin\angle A = \dfrac{3}{4}$ とします．他の2辺の長さ $\overline{AB}, \overline{BC}$ を求めなさい．