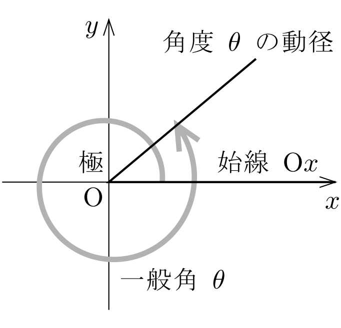
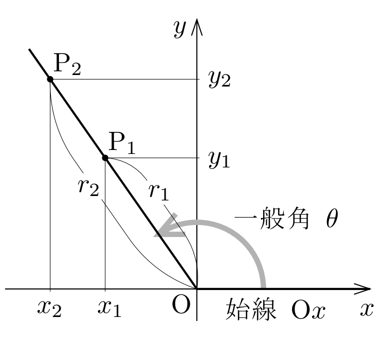
§6.3 一般角の三角比

xy 座標平面において極と始線とをとるときは，特に断りがない限り，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに延びる半直線を始線と定めます．この始線を $\mathrm{O}x$ と書き表します：



$$\mathrm{O}x=\{\,(x,y)\mid x\ge 0 \text{ かつ } y=0\,\}\ .$$

一般角 θ に対して，θ の**正弦** (sine) $\sin\theta$ と，θ の**余弦** (cosine) $\cos\theta$ と，θ の**正接** (tangent) $\tan\theta$ とを定義します． xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに延びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P_1 と P_2 とをとります． $\mathrm{P}_1\ne\mathrm{O}$, $\mathrm{P}_2\ne\mathrm{O}$ とします．次のようにおきます：



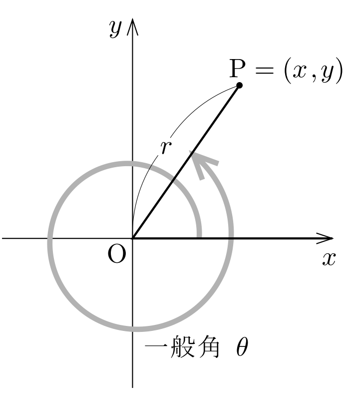
$$\mathrm{P}_1=(x_1,y_1)\ ,\qquad \mathrm{P}_2=(x_2,y_2)\ ;$$
$$\overline{\mathrm{OP}_1}=r_1\ ,\qquad \overline{\mathrm{OP}_2}=r_2\ .$$

原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ と点 $\mathrm{P}_1=(x_1,y_1)$ と点 $\mathrm{P}_2=(x_2,y_2)$ とは一直線上にありますから， $\dfrac{y_1}{r_1}=\dfrac{y_2}{r_2}$ ， $\dfrac{x_1}{r_1}=\dfrac{x_2}{r_2}$ ；更に， $x_1\ne 0$ のとき， $x_2\ne 0$ で $\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{y_2}{x_2}$ ．

つまり，xy 座標平面において，原点 O から x 軸の向きに延びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度（一般角）が θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\ne\mathrm{O}$ ）をとり， $r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおくと， $\dfrac{y}{r}$ ， $\dfrac{x}{r}$ ，（ $x\ne 0$ のとき） $\dfrac{y}{x}$ の値は一般角 θ の値だけから唯一に決まります．

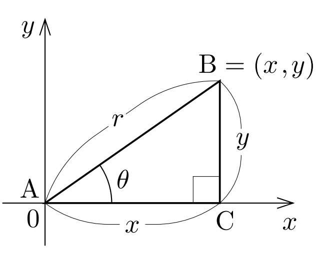
定義　一般角 θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ は次のように定義される：xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに延びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （但し $\mathrm{P}\ne\mathrm{O}$ ）をとり， $r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおくとき，

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\ ,\qquad \cos\theta=\frac{x}{r}\ ,$$
$$x\ne 0 \text{ のとき}\quad \tan\theta=\frac{y}{x}\ .$$



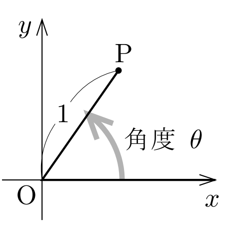
一般角の正弦・余弦・正接などを三角比といいます．

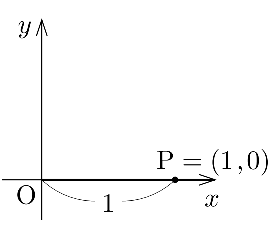
一般角の三角比は6.1節で述べた直角三角形の三角比の定義の拡張です． 相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において $\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ とします． 次のように xy 座標系を定めます： A が原点 $(0,0)$ で，点 C は x 軸上にあり C の x 座標は正で，点 B の y 座標は正である． $\angle\mathrm{BAC}=\theta$ ， $\overline{\mathrm{AB}}=r$ ， $\mathrm{B}=(x,y)$ とおきます． $x>0$ なので $x=\overline{\mathrm{AC}}$ ， $y>0$ なので $y=\overline{\mathrm{CB}}$ ． 線分 AB の始線 $\mathrm{A}x$ に対する角度は θ ですから，



$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}\ ,\qquad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}\ ,\qquad \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}\ .$$

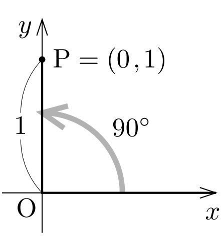
角度 0° 及び 90° の正弦・余弦・正接を求めます． xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに延びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=1$ となる点 P を考えます． 始線 $\mathrm{O}x$ に対する線分 OP の角度が $\theta=0^\circ$ のとき，右図のように，線分 OP は始線 $\mathrm{O}x$ に重なります． $\overline{\mathrm{OP}}=1$ ， $\mathrm{P}=(1,0)$ なので，





$$\sin 0^\circ=\frac{0}{1}=0\ ,\quad \cos 0^\circ=\frac{1}{1}=1\ ,$$
$$\tan 0^\circ=\frac{0}{1}=0\ .$$

始線 $\mathrm{O}x$ に対する線分 OP の角度が $\theta=90^\circ$ のとき，右図のように，線分 OP は y 軸の y 座標が0以上の部分に重なります． $\overline{\mathrm{OP}}=1$ ， $\mathrm{P}=(0,1)$ なので，

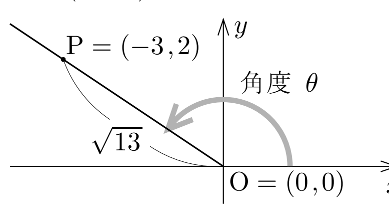


$$\sin 90^\circ=\frac{1}{1}=1\ ,\qquad \cos 90^\circ=\frac{0}{1}=0\ ;$$

$\tan 90^\circ$ の値はありません． 以上の結果をまとめます：

$$\sin 0^\circ=0\ ,\qquad \cos 0^\circ=1\ ,\qquad \tan 0^\circ=0\ ;$$
$$\sin 90^\circ=1\ ,\qquad \cos 90^\circ=0\ ,\qquad \tan 90^\circ \text{ の値は無い}\ .$$

例題　一般角 θ に対して，xy 座標平面において原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに延びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に点 $\mathrm{P}=(-3,2)$ が属すとする． θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ の各々の値を求める．



$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-3-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{13}\ .$$

正弦・余弦・正接の定義より，

$$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}\ ,\qquad \cos\theta=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3}{\sqrt{13}}\ ,\qquad \tan\theta=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}\ .$$ 終

問題 6.3.1　一般角 θ に対して，xy 座標平面において原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに延びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に点 $\mathrm{P}=(5,-4)$ が属すとします． θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ の各々の値を求めなさい．

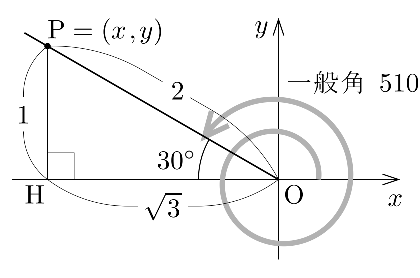
例題　xy 座標平面の点 $\mathrm{P}=(0,3)$ に対して，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに延びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する線分 OP の角度を θ とする． θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ の各々の値を求める．

$\overline{\mathrm{OP}}=3$ なので， $\sin\theta=\dfrac{3}{3}=1$ ， $\cos\theta=\dfrac{0}{3}=0$ ． $\tan\theta$ の値は無い． 終

問題 6.3.2　xy 座標平面の点 $\mathrm{P}=(0,-5)$ に対して，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに延びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する線分 OP の角度を θ とします． θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ の各々の値を求めなさい．

例解　一般角 510° の正弦 $\sin 510^\circ$, 余弦 $\cos 510^\circ$, 正接 $\tan 510^\circ$ の各々の値を求めます． xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに延びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 510° の動径に属す点 P（ $\mathrm{P}\ne\mathrm{O}$ ）をとり，点 P から x 軸に下ろした垂線の足を H とおき，直角三角形 OPH に着目します．

$$\angle\mathrm{POH}=180^\circ-(510^\circ-360^\circ)=30^\circ\ .$$



よって直角三角形 OPH の内角は 30° と 60° と 90° なので，

$$\overline{\mathrm{HP}}:\overline{\mathrm{PO}}:\overline{\mathrm{OH}}=1:2:\sqrt{3}\ .$$

点 P は角度 510° の動径に属す O 以外のどの点でもよいので， $r=\overline{\mathrm{OP}}=2$ とします． $\mathrm{P}=(x,y)$ とおきます．

$$|x|=\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{3}\ ,\qquad |y|=\overline{\mathrm{HP}}=1\ .$$

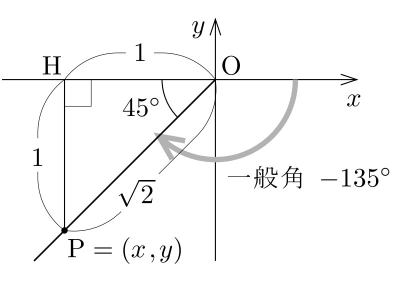
$x<0$ なので $x=-\sqrt{3}$ ， $y>0$ なので $y=1$ ． 従って，

$$\sin 510^\circ=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}\ ,$$
$$\cos 510^\circ=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$
$$\tan 510^\circ=\frac{y}{x}=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ .$$ 終

問題 6.3.3　xy 座標平面において，原点 O から x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 660° の動径を描き，一般角 660° の正弦 $\sin 660^\circ$, 余弦 $\cos 660^\circ$, 正接 $\tan 660^\circ$ の各々の値を求めなさい．

例解　一般角 -135° の正弦 $\sin(-135^\circ)$, 余弦 $\cos(-135^\circ)$, 正接 $\tan(-135^\circ)$ の各々の値を求めます． xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに延びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 -135° の動径に属す点 P（ $\mathrm{P}\ne\mathrm{O}$ ）をとり，点 P から x 軸に下ろした垂線の足を H とおき，直角三角形 OPH に着目します．

$$\angle\mathrm{POH}=180^\circ-135^\circ=45^\circ\ .$$



よって直角三角形 OPH は直角二等辺三角形なので，

$$\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{HO}}:\overline{\mathrm{OP}}=1:1:\sqrt{2}\ .$$

点 P は角度 -135° の動径に属す O 以外のどの点でもよいので， $r=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2}$ とします． $\mathrm{P}=(x,y)$ とおきます．

$$|x|=\overline{\mathrm{OH}}=1\ ,\qquad |y|=\overline{\mathrm{HP}}=1\ .$$

$x<0$ なので $x=-1$ ， $y<0$ なので $y=-1$ ． 従って，

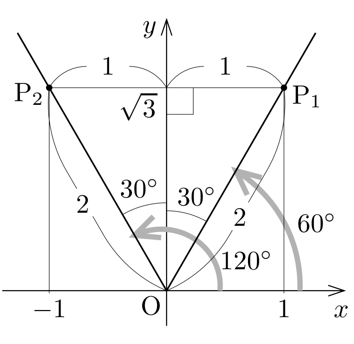
$$\sin(-135^\circ)=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$
$$\cos(-135^\circ)=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$
$$\tan(-135^\circ)=\frac{y}{x}=\frac{-1}{-1}=1\ .$$ 終

問題 6.3.4　xy 座標平面において，原点 O から x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 -225° の動径を描き，一般角 -225° の正弦 $\sin(-225^\circ)$, 余弦 $\cos(-225^\circ)$, 正接 $\tan(-225^\circ)$ の各々の値を求めなさい．

三角比の値から角度を求めてみます．

例解　$0^\circ\le\theta\le 180^\circ$ の範囲で $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる一般角 θ を求めます． xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに延びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\ne\mathrm{O}$ ）をとり， $r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおきます．

$$\frac{y}{r}=\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$
$$y:r=\sqrt{3}:2\ .$$

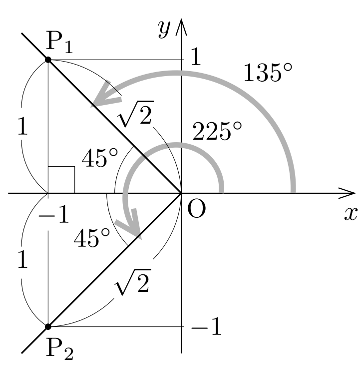


$r=\overline{\mathrm{OP}}=2$ とすると，$y=\sqrt{3}$ ， $x^2=r^2-y^2=1$ なので $x=\pm 1$ ． 右図のように始線 $\mathrm{O}x$ に対する OP の角度 θ は 60° と 120° とです． つまり $\theta=60^\circ$ または $\theta=120^\circ$ ． 終

問題 6.3.5　$0^\circ\le\theta\le 180^\circ$ の範囲で $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ となる一般角 θ を求めなさい．

例解　$0^\circ\le\theta\le 360^\circ$ の範囲で $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる一般角 θ を求めます． xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに延びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\ne\mathrm{O}$ ）をとり， $r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおきます．

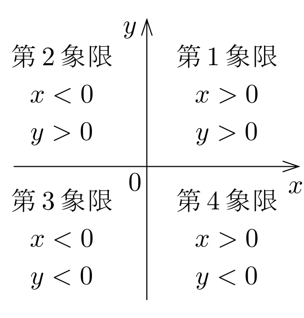
$$\frac{x}{r}=\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$
$$x:r=-1:\sqrt{2}\ .$$

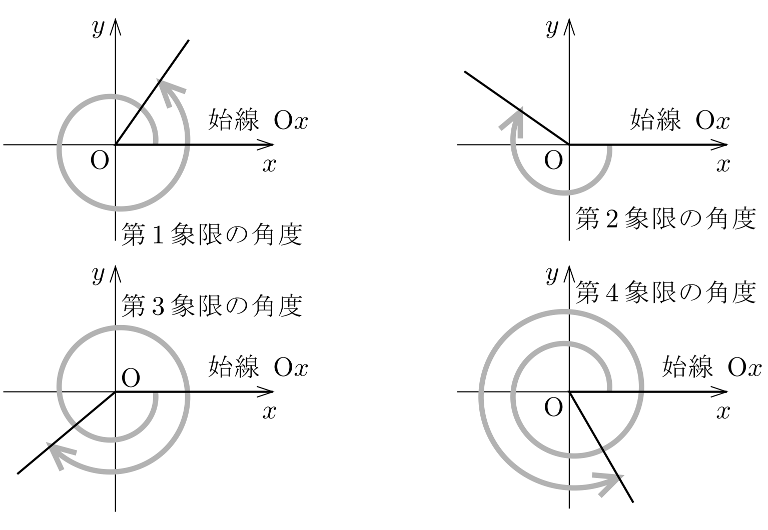


$r=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2}$ とすると， $x=-1$ ， $y^2=r^2-x^2=1$ なので $y=\pm 1$ ． 右図のように始線 $\mathrm{O}x$ に対する OP の角度 θ は 135° と 225° とです． つまり $\theta=135^\circ$ または $\theta=225^\circ$ ． 終

問題 6.3.6　$0^\circ\le\theta\le 360^\circ$ の範囲で $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる一般角 θ を求めなさい．

xy 座標平面において， $x>0$ かつ $y>0$ である点 (x,y) の全体を第1象限といい， $x<0$ かつ $y>0$ である点 (x,y) の全体を第2象限といい， $x<0$ かつ $y<0$ である点 (x,y) の全体を第3象限といい， $x>0$ かつ $y<0$ である点 (x,y) の全体を第4象限といいます（右図参照）． xy 座標平面の原点 O を端点とする x 軸の向きの始線 $\mathrm{O}x$ に対する一般角について，動径が原点 O を除いて第1象限に含まれるとき第1象限の角度といい，動径が原点 O を除いて第2象限に含まれるとき第2象限の角度といい，動径が原点 O を除いて第3象限に含まれるとき第3象限の角度といい，動径が原点 O を除いて第4象限に含まれるとき第4象限の角度といいます． 例えば次のようになります．





一般角 θ に対して，xy 座標平面において原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ と，始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\ne\mathrm{O}$ ）とをとり， $r=\overline{\mathrm{OP}}>0$ とおきます． θ の正弦・余弦の符号は次のようになります：

θ が第1象限の角度のとき，$x>0$ なので $\cos\theta=\dfrac{x}{r}>0$ ，$y>0$ なので $\sin\theta=\dfrac{y}{r}>0$ ；

θ が第2象限の角度のとき，$x<0$ なので $\cos\theta=\dfrac{x}{r}<0$ ，$y>0$ なので $\sin\theta=\dfrac{y}{r}>0$ ；

θ が第3象限の角度のとき，$x<0$ なので $\cos\theta=\dfrac{x}{r}<0$ ，$y<0$ なので $\sin\theta=\dfrac{y}{r}<0$ ；

θ が第4象限の角度のとき，$x>0$ なので $\cos\theta=\dfrac{x}{r}>0$ ，$y<0$ なので $\sin\theta=\dfrac{y}{r}<0$ ．