

§6.3 一般角の三角比

xy 座標平面において極と始線をとるときは、特に断りがない限り、原点 $O = (0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる半直線を始線と定めます。この始線を Ox と書き表します：

$$Ox = \{ (x,y) \mid x \geq 0 \text{ かつ } y = 0 \} .$$

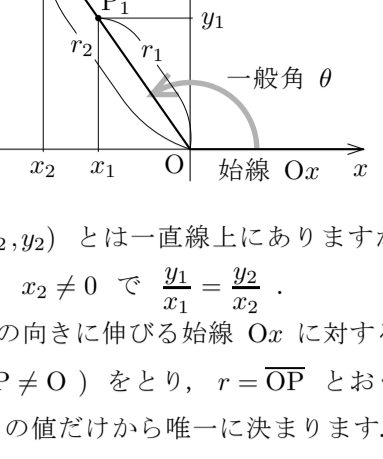
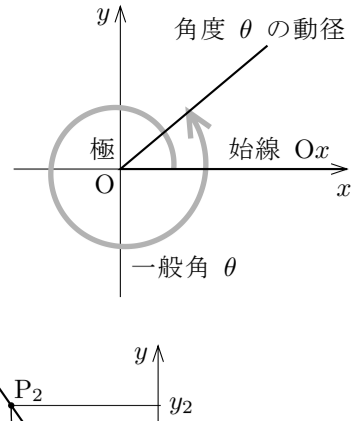
一般角 θ に対して、 θ の正弦 (sine) $\sin\theta$ と θ の余弦 (cosine) $\cos\theta$ と θ の正接 (tangent) $\tan\theta$ とを定義します。 xy 座標平面において、原点 $O = (0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属する点 P_1 と P_2 とをとり、 $P_1 \neq O$, $P_2 \neq O$ とします。 次のようにおきます：

$$P_1 = (x_1, y_1) , \quad P_2 = (x_2, y_2) ;$$

$$\overline{OP_1} = r_1 , \quad \overline{OP_2} = r_2 .$$

原点 $O = (0,0)$ と点 $P_1 = (x_1, y_1)$ と点 $P_2 = (x_2, y_2)$ とは一直線上にありますから、 $\frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2}$, $\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2}$; 更に、 $x_1 \neq 0$ のとき、 $x_2 \neq 0$ で $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$.

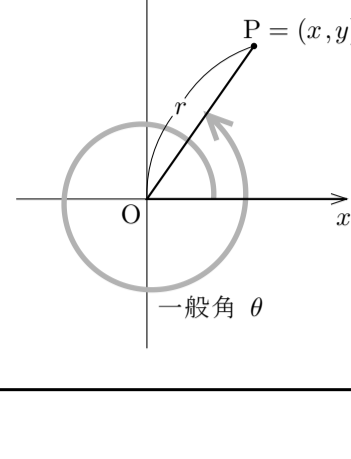
つまり、 xy 座標平面において、原点 O から x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 (一般角) が θ の動径に属する点 $P = (x,y)$ ($P \neq O$) をとり、 $r = \overline{OP}$ とおくと、 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, ($x \neq 0$ のとき) $\frac{y}{x}$ の値は一般角 θ の値だけから唯一に決まります。



定義 一般角 θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ を次のように定義する： xy 座標平面において、原点 $O = (0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属する点 $P = (x,y)$ (但し $P \neq O$) について $r = \overline{OP}$ とおくと、

$$\sin\theta = \frac{y}{r} , \quad \cos\theta = \frac{x}{r} ,$$

$$x \neq 0 \text{ のとき } \tan\theta = \frac{y}{x} .$$



一般角の正弦・余弦・正接などを三角比といいます。

相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において $\angle ACB = 90^\circ$ とします。次のように xy 座標系を定めます： A が原点 $(0,0)$ で、点 C は x 軸上にあり C の x 座標は正で、点 B の y 座標は正である。 $\angle BAC = \theta$, $\overline{AB} = r$, $B = (x,y)$ とおきます。 $x > 0$ なので $x = \overline{AC}$, $y > 0$ なので $y = \overline{CB}$. 線分 AB の始線 Ax に対する角度は θ ですから、

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} , \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} , \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} .$$

このように一般角の三角比は6.1節で述べた直角三角形の三角比の定義の拡張です。

xy 座標平面において、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属する点 P で $\overline{OP} = 1$ となる点 P を考えます。始線 Ox に対する線分 OP の角度が $\theta = 0^\circ$ のとき、右図のように、線分 OP は始線 Ox に重なります。 $\overline{OP} = 1$, $P = (1,0)$ なので、

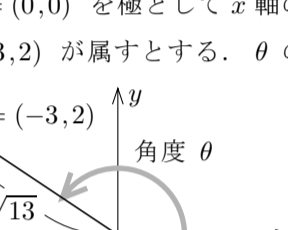
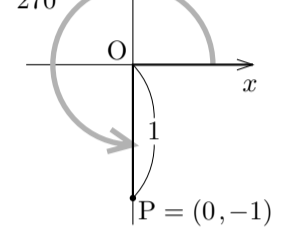
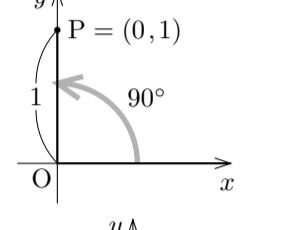
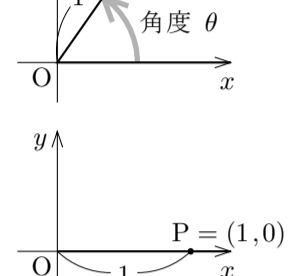
$$\sin 0^\circ = \frac{0}{1} = 0 , \quad \cos 0^\circ = \frac{1}{1} = 1 ,$$

$$\tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0 .$$

始線 Ox に対する線分 OP の角度が $\theta = 90^\circ$ のとき、右図のように、線分 OP は y 軸の y 座標が 0 以上の部分に重なります。 $\overline{OP} = 1$, $P = (0,1)$ なので、

$$\sin 90^\circ = \frac{1}{1} = 1 , \quad \cos 90^\circ = \frac{0}{1} = 0 ;$$

$\tan 90^\circ$ の値はありません。更に、始線 Ox に対する線分 OP の角度が $\theta = 270^\circ$ のとき、 $P = (0,-1)$ なので、 $\tan 270^\circ$ の値はありません。 $\theta = \pm 90^\circ, \pm 270^\circ, \pm 450^\circ, \dots$ のとき、つまり一般角 θ が 90° の奇数倍であるとき、 $\tan\theta$ の値はありません。一般角 θ が 90° の奇数倍でないとき $\tan\theta$ の値があります。

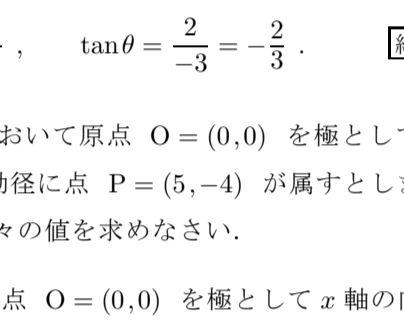


例題 一般角 θ に対して、 xy 座標平面において原点 $O = (0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に点 $P = (-3,2)$ が属するとする。 θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ の各々の値を求める。

$$\overline{OP} = \sqrt{(-3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13} .$$

正弦・余弦・正接の定義より、

$$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{13}} , \quad \cos\theta = \frac{-3}{\sqrt{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}} , \quad \tan\theta = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} . \quad \text{終}$$



問題6.3.1 一般角 θ に対して、 xy 座標平面において原点 $O = (0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に点 $P = (5,-4)$ が属するとする。 θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ の各々の値を求めなさい。

例題 xy 座標平面の点 $P = (0,3)$ に対して、原点 $O = (0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度を θ とする。 θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ の各々の値を求める。

$$\overline{OP} = 3 \text{ なので、 } \sin\theta = \frac{3}{3} = 1 , \quad \cos\theta = \frac{0}{3} = 0 . \quad \tan\theta \text{ の値は無い。} \quad \text{終}$$

問題6.3.2 xy 座標平面の点 $P = (0,-5)$ に対して、原点 $O = (0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度を θ とする。 θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ の各々の値を求めなさい。

例解 一般角 510° の正弦 $\sin 510^\circ$, 余弦 $\cos 510^\circ$, 正接 $\tan 510^\circ$ の各々の値を求めます。 xy 座標平面において、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 510° の動径に属する点 P ($P \neq O$) をとり、点 P から x 軸に下ろした垂線の足を H とおき、直角三角形 OPH に着目します。

$$\angle POH = 180^\circ - (510^\circ - 360^\circ) = 30^\circ .$$

よって直角三角形 OPH の内角は 30° と 60° と 90° なので、

$$\overline{HP} : \overline{PO} : \overline{OH} = 1 : 2 : \sqrt{3} .$$

点 P は角度 510° の動径に属する O 以外のどの点でもよいので、 $r = \overline{OP} = 2$ とします。 $P = (x,y)$ とおきます。

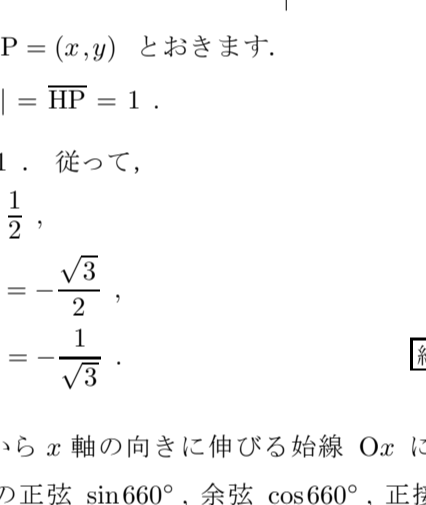
$$|x| = \overline{OH} = \sqrt{3} , \quad |y| = \overline{HP} = 1 .$$

$x < 0$ なので $x = -\sqrt{3}$, $y > 0$ なので $y = 1$. 従って、

$$\sin 510^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{2} ,$$

$$\cos 510^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$\tan 510^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} . \quad \text{終}$$



問題6.3.3 xy 座標平面において、原点 O から x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 660° の動径を描き、一般角 660° の正弦 $\sin 660^\circ$, 余弦 $\cos 660^\circ$, 正接 $\tan 660^\circ$ の各々の値を求めなさい。

例解 一般角 -135° の正弦 $\sin(-135^\circ)$, 余弦 $\cos(-135^\circ)$, 正接 $\tan(-135^\circ)$ の各々の値を求めます。 xy 座標平面において、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 -135° の動径に属する点 P ($P \neq O$) をとり、点 P から x 軸に下ろした垂線の足を H とおき、直角三角形 OPH に着目します。

$$\angle POH = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ .$$

よって直角三角形 OPH は直角二等辺三角形なので、

$$\overline{PH} : \overline{HO} : \overline{OP} = 1 : 1 : \sqrt{2} .$$

点 P は角度 -135° の動径に属する O 以外のどの点でもよいので、 $r = \overline{OP} = \sqrt{2}$ とします。 $P = (x,y)$ とおきます。

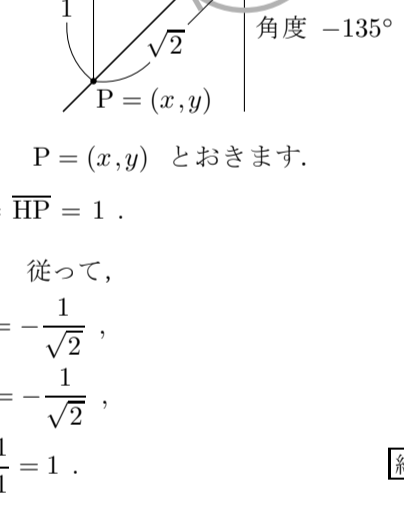
$$|x| = \overline{OH} = 1 , \quad |y| = \overline{HP} = 1 .$$

$x < 0$ なので $x = -1$, $y < 0$ なので $y = -1$. 従って、

$$\sin(-135^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

$$\cos(-135^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

$$\tan(-135^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1 . \quad \text{終}$$



問題6.3.4 xy 座標平面において、原点 O から x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 -225° の動径を描き、一般角 -225° の正弦 $\sin(-225^\circ)$, 余弦 $\cos(-225^\circ)$, 正接 $\tan(-225^\circ)$ の各々の値を求めなさい。

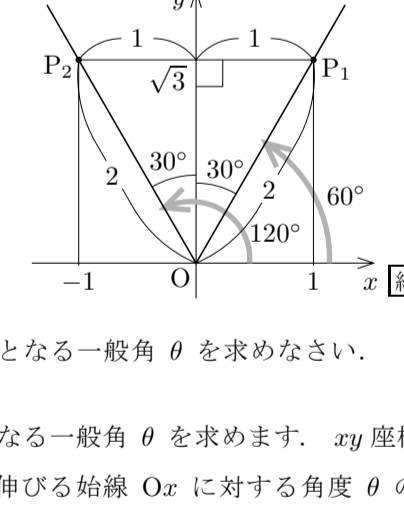
三角比の値から角度を求めてみます。

例解 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる一般角 θ を求めます。 xy 座標平面において、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属する点 $P = (x,y)$ ($P \neq O$) をとり、 $r = \overline{OP}$ とおきます。

$$\frac{y}{r} = \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$y : r = \sqrt{3} : 2 .$$

$r = \overline{OP} = 2$ とすると、 $y = \sqrt{3}$, $x^2 = r^2 - y^2 = 1$ なので $x = \pm 1$. 右図のように始線 Ox に対する OP の角度 θ は 60° と 120° とです。つまり $\theta = 60^\circ$ または $\theta = 120^\circ$.



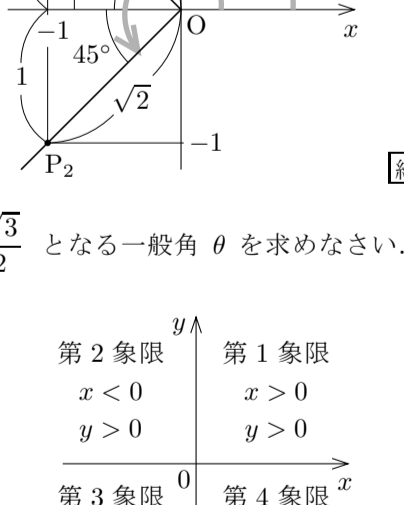
問題6.3.5 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で $\sin\theta = \frac{1}{2}$ となる一般角 θ を求めなさい。

例解 $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ の範囲で $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる一般角 θ を求めます。 xy 座標平面において、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属する点 $P = (x,y)$ ($P \neq O$) をとり、 $r = \overline{OP}$ とおきます。

$$\frac{x}{r} = \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

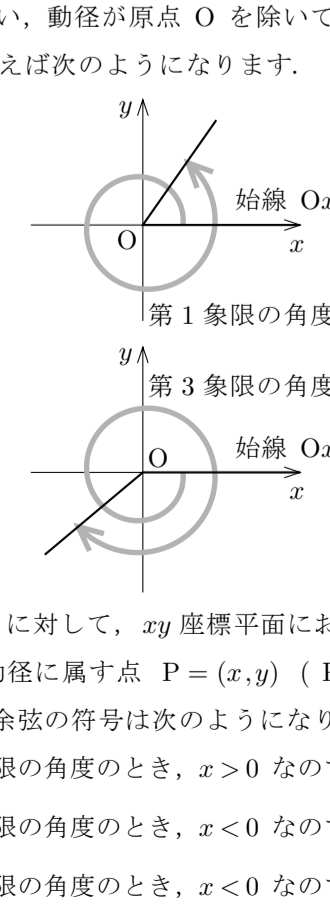
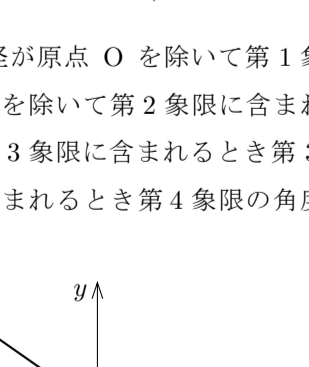
$$x : r = -1 : \sqrt{2} .$$

$r = \overline{OP} = \sqrt{2}$ とすると、 $x = -1$, $y^2 = r^2 - x^2 = 1$ なので $y = \pm 1$. 右図のように始線 Ox に対する OP の角度 θ は 135° と 225° とです。つまり $\theta = 135^\circ$ または $\theta = 225^\circ$.



問題6.3.6 $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ の範囲で $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる一般角 θ を求めなさい。

xy 座標平面において、 $x > 0$ かつ $y > 0$ である点 (x,y) の全体を第1象限といい、 $x < 0$ かつ $y > 0$ である点 (x,y) の全体を第2象限といい、 $x < 0$ かつ $y < 0$ である点 (x,y) の全体を第3象限といい、 $x > 0$ かつ $y < 0$ である点 (x,y) の全体を第4象限といいます (右図参照) . xy 座標平面の原点 O を端点とする x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する一般角について、動径が原点 O を除いて第1象限に含まれるとき第1象限の角度といい、動径が原点 O を除いて第2象限に含まれるとき第2象限の角度といい、動径が原点 O を除いて第3象限に含まれるとき第3象限の角度といい、動径が原点 O を除いて第4象限に含まれるとき第4象限の角度といいます。例えば次のようになります。



一般角 θ に対して、 xy 座標平面において原点 $O = (0,0)$ と、始線 Ox に対する角度 θ の動径に属する点 $P = (x,y)$ ($P \neq O$) とをとり、 $r = \overline{OP} > 0$ とおきます。 θ の正弦・余弦の符号は次のようになります：

θ が第1象限の角度のとき、 $x > 0$ なので $\cos\theta = \frac{x}{r} > 0$, $y > 0$ なので $\sin\theta = \frac{y}{r} > 0$;
 θ が第2象限の角度のとき、 $x < 0$ なので $\cos\theta = \frac{x}{r} < 0$, $y > 0$ なので $\sin\theta = \frac{y}{r} > 0$;
 θ が第3象限の角度のとき、 $x < 0$ なので $\cos\theta = \frac{x}{r} < 0$, $y < 0$ なので $\sin\theta = \frac{y}{r} < 0$;
 θ が第4象限の角度のとき、 $x > 0$ なので $\cos\theta = \frac{x}{r} > 0$, $y < 0$ なので $\sin\theta = \frac{y}{r} < 0$.

第2象限の角度 θ_2	第1象限の角度 θ_1
$\sin\theta_2 > 0$	$\sin\theta_1 > 0$
$\cos\theta_2 < 0$	$\cos\theta_1 > 0$
0	x
第3象限の角度 θ_3	第4象限の角度 θ_4
$\sin\theta_3 < 0$	$\sin\theta_4 < 0$
$\cos\theta_3 < 0$	$\cos\theta_4 > 0$