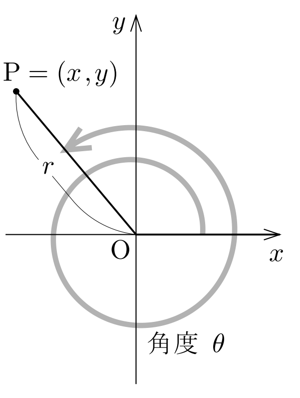
§6.4　三角比の性質

定理 6.4.1　任意の一般角 θ について，θ が角度 90° の奇数倍でないときに限り，$\tan\theta$ の値があり

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \ .$$

証明　xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに延びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり，$\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく．　$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ の値があるのは，$x\neq 0$ のとき，つまり

$\theta\neq\pm 90^\circ$ かつ $\theta\neq\pm 270^\circ$ かつ $\theta\neq\pm 450^\circ$ かつ $\cdots$．のとき，つまり θ が 90° の奇数倍でないときである．このとき，$\cos\theta\neq 0$ で，



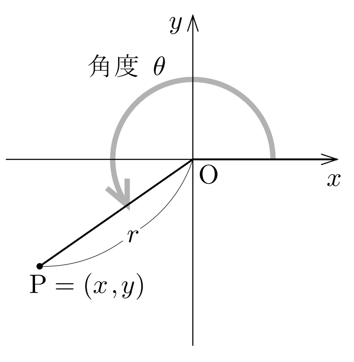
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan\theta \ .$$

（証明終り）

定理 6.4.2　任意の一般角 θ について

$$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2 = 1 \ .$$

証明　xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに延びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとる．$\mathrm{O}=(0,0)$ なので，定理 6.0 より，



$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = (x-0)^2+(y-0)^2 = x^2+y^2 \ .$$

$\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく．　$\overline{\mathrm{OP}}^2=r^2$ なので，

$$x^2+y^2 = r^2 \ .$$

定義より　$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ ，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ なので，

$$(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2 = \left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1 \ ,$$

つまり　$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ ．　（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　一般角 θ について　$\sin\theta=\dfrac{5}{7}$ ，$\cos\theta\geq 0$ とする．　$\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求める．

〔解説〕 定理 6.4.2 より　$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ ．　$\sin\theta=\dfrac{5}{7}$ なので，

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2+(\cos\theta)^2=1 \ ,$$

$$(\cos\theta)^2=1-\left(\frac{5}{7}\right)^2=1-\frac{25}{49}=\frac{24}{49} \ ,$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{24}{49}}=\pm\frac{\sqrt{24}}{7} \ ,$$

$\cos\theta\geq 0$ なので　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{24}}{7}$ ．　更に，定理 6.4.1 より，

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{5}{7}}{\frac{\sqrt{24}}{7}}=\frac{5}{\sqrt{24}} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.4.1}}$　一般角 θ について　$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$ ，$\cos\theta\leq 0$ とします．　$\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めなさい．

$\boxed{\text{問題 6.4.2}}$　一般角 θ について　$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ ，$\sin\theta\geq 0$ とします．　$\sin\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めなさい．

定理 6.4.3　任意の一般角 θ について，θ が角度 90° の奇数倍でないとき，

$$1+(\tan\theta)^2 = \frac{1}{(\cos\theta)^2} \ .$$

証明　一般角 θ は角度 90° の奇数倍でないとする．　このとき　$\cos\theta\neq 0$ ．　定理 6.4.2 より　$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ ．　両辺を $(\cos\theta)^2$ で割ると，

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}+\frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \frac{1}{(\cos\theta)^2} \ ,$$

この等式の左辺は

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}+\frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1 = (\tan\theta)^2+1 = 1+(\tan\theta)^2 \ ,$$

従って　$1+(\tan\theta)^2=\dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ ．　（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　一般角 θ について　$\tan\theta=3$ ，$\cos\theta\leq 0$ とする．　$\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求める．

〔解説〕 定理 6.4.3 より　$1+(\tan\theta)^2=\dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ なので，

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2}=1+(\tan\theta)^2=1+3^2=10 \ ,$$

$$(\cos\theta)^2=\frac{1}{10} \ ,$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1}{10}}=\pm\frac{1}{\sqrt{10}} \ ,$$

$\cos\theta\leq 0$ なので　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ．　更に，定理 6.4.1 より　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので，

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{3}{\sqrt{10}} \ .$$

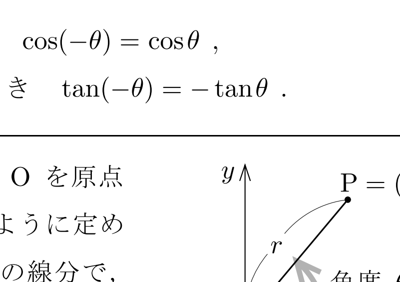
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.4.3}}$　一般角 θ について　$\tan\theta=\dfrac{3}{2}$ ，$\cos\theta\leq 0$ とします．　$\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求めなさい．

xy 座標平面の点　$\mathrm{P}'=(x',y')$ が点　$\mathrm{P}=(x,y)$ と x 軸に関して対称であるとき，

$$x'=x \ , \quad y'=-y \ .$$

このことから次の定理が導かれます．

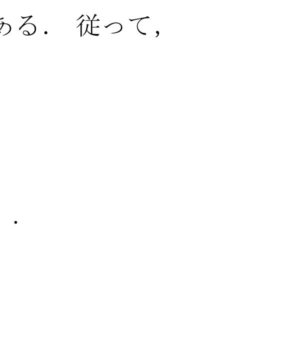


定理 6.4.4　任意の一般角 θ について，

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta \ , \qquad \cos(-\theta)=\cos\theta \ ,$$

$$\theta \text{ が } 90^\circ \text{ の奇数倍でないとき} \quad \tan(-\theta)=-\tan\theta \ .$$

証明　実数 r について　$r>0$ とする．　点 O を原点とする xy 座標平面の点　$\mathrm{P}=(x,y)$ を次のように定める：線分 OP は始線 Ox に対する角度 θ の線分で，$\overline{\mathrm{OP}}=r$ ．　更に，点　$\mathrm{P}'=(x',y')$ を次のように定める：線分 OP$'$ は始線 Ox に対する角度 $-\theta$ の線分で，$\overline{\mathrm{OP}'}=r$ ．　$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}'}$ で，始線 Ox に対する線分 OP の角度は θ，線分 OP$'$ の角度は $-\theta$ なので，



点　$\mathrm{P}'=(x',y')$ と点　$\mathrm{P}=(x,y)$ とは x 軸に関して対称である．　従って，

$$x'=x \ , \qquad y'=-y \ .$$

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ ，$\sin(-\theta)=\dfrac{y'}{r}$ なので，

$$\sin(-\theta) = \frac{y'}{r} = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\theta \ .$$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ ，　$\cos(-\theta)=\dfrac{x'}{r}$ なので

$$\cos(-\theta) = \frac{x'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\theta \ .$$

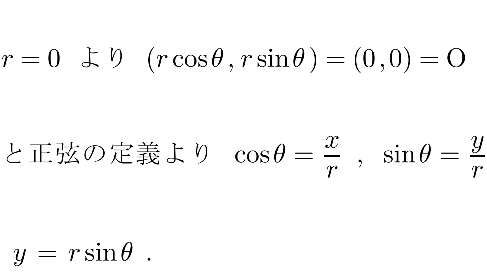
更に，θ が 90° の奇数倍でないとき，　$x\neq 0$ かつ $x'\neq 0$ で，　$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ ，$\tan(-\theta)=\dfrac{y'}{x'}$ なので，

$$\tan(-\theta) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta \ .$$

（証明終り）

定理 6.4.5　xy 座標平面の点 P について，原点 O から x 軸の向きに延びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であるとき，$\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおくと

$$\mathrm{P} = (r\cos\theta, r\sin\theta) \ .$$



証明　$r=\overline{\mathrm{OP}}$ は線分の長さなので　$r\geq 0$ ．　$r=0$ のときと $r>0$ のときに分ける．

$r=0$ のとき，$\overline{\mathrm{OP}}=0$ なので　$\mathrm{P}=\mathrm{O}$ ，$r=0$ より　$(r\cos\theta, r\sin\theta)=(0,0)=\mathrm{O}$ ；よって　$\mathrm{P}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ．

$r>0$ のとき，　$\mathrm{P}=(x,y)$ とおく．　余弦と正弦の定義より　$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ ，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ なので，

$$x = r\cos\theta \ , \qquad y = r\sin\theta \ .$$

よって　$\mathrm{P}=(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ．　（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，線分 OP の始線 Ox に対する角度が 30° で　$\overline{\mathrm{OP}}=5$ とする．　点 P を求める．

$\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$ なので，定理 6.4.5 より，

$$\mathrm{P}=(5\cos 30^\circ, 5\sin 30^\circ)=\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2}\right) \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.4.4}}$　点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，線分 OP の始線 Ox に対する角度が 60° で　$\overline{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{3}$ とします．　点 P を求めなさい．

定理 6.4.6　任意の一般角 θ について，

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1 \ , \qquad -1 \leq \cos\theta \leq 1 \ .$$

証明　任意の一般角 θ について，定理 6.4.2 より　$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ ．　$S=\sin\theta$ とおき　$C=\cos\theta$ とおくと　$S^2+C^2=1$ ．　これより　$C^2=1-S^2$ ．　C は実数なので　$C^2\geq 0$ ，よって　$1-S^2\geq 0$ ．　この不等式を S に関する不等式と考えて解く；　$S^2-1\leq 0$ ，　$(S+1)(S-1)\leq 0$ ，　$-1\leq S\leq 1$ ．　故に　$-1\leq\sin\theta\leq 1$ ．　また，$S^2+C^2=1$ より　$1-C^2=S^2\geq 0$ ，この不等式を C に関する不等式として解くと　$-1\leq C\leq 1$ ．　故に　$-1\leq\cos\theta\leq 1$ ．　（証明終り）