§6.4　三角比の性質

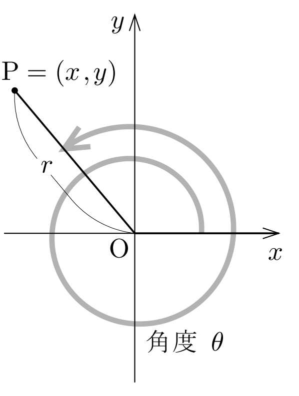
定理 6.4.1　θ が角度 90° の奇数倍でない任意の一般角 θ について,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \ .$$

証明　xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに延びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり， $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく． $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ の値があるのは, $x\neq 0$ のとき，つまり

$\theta\neq\pm 90^\circ$ かつ $\theta\neq\pm 270^\circ$ かつ $\theta\neq\pm 450^\circ$ かつ $\cdots\cdot$

のとき，つまり θ が 90° の奇数倍でないときである．このとき， $\cos\theta\neq 0$ で,



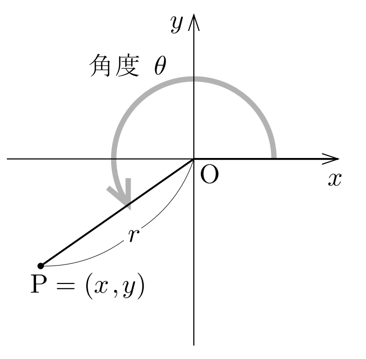
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan\theta \ .$$

（証明終り）

定理 6.4.2　任意の一般角 θ について

$$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2 = 1 \ .$$

証明　xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに延びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとる． $\mathrm{O}=(0,0)$ なので，定理 6.0 より,



$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = (x-0)^2+(y-0)^2 = x^2+y^2 \ .$$

$\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく． $\overline{\mathrm{OP}}^2=r^2$ なので,

$$x^2+y^2 = r^2 \ .$$

定義より $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ ， $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ なので,

$$(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2 = \left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1 \ ,$$

つまり $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ ．　（証明終り）

例題　一般角 θ について $\sin\theta=\dfrac{5}{7}$ ， $\cos\theta\geq 0$ とする． $\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求める．

〔解説〕 定理 6.4.2 より $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ ． $\sin\theta=\dfrac{5}{7}$ なので,

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2+(\cos\theta)^2=1 \ ,$$

$$(\cos\theta)^2=1-\left(\frac{5}{7}\right)^2=1-\frac{25}{49}=\frac{24}{49} \ ,$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{24}{49}}=\pm\frac{\sqrt{24}}{7} \ ,$$

$\cos\theta\geq 0$ なので $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{24}}{7}$ ．更に，定理 6.4.1 より,

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{5}{7}}{\frac{\sqrt{24}}{7}}=\frac{5}{\sqrt{24}} \ .$$

終

問題 6.4.1　一般角 θ について $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$ ， $\cos\theta\leq 0$ とします． $\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めなさい．

問題 6.4.2　一般角 θ について $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ ， $\sin\theta\geq 0$ とします． $\sin\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めなさい．

定理 6.4.3　角度 90° の奇数倍でない任意の一般角 θ について,

$$1+(\tan\theta)^2 = \frac{1}{(\cos\theta)^2} \ .$$

証明　一般角 θ は角度 90° の奇数倍でないとする．このとき $\cos\theta\neq 0$ ．定理 6.4.2 より $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ ．両辺を $(\cos\theta)^2$ で割ると,

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}+\frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \frac{1}{(\cos\theta)^2} \ ,$$

この等式の左辺は

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}+\frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1 = (\tan\theta)^2+1 = 1+(\tan\theta)^2 \ ,$$

従って $1+(\tan\theta)^2=\dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ ．　（証明終り）

例題　一般角 θ について $\tan\theta=3$ ， $\cos\theta\leq 0$ とする． $\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求める．

〔解説〕 定理 6.4.3 より $1+(\tan\theta)^2=\dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ なので,

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2}=1+(\tan\theta)^2=1+3^2=10 \ ,$$

$$(\cos\theta)^2=\frac{1}{10} \ ,$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1}{10}}=\pm\frac{1}{\sqrt{10}} \ ,$$

$\cos\theta\leq 0$ なので $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ．更に，定理 6.4.1 より $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので,

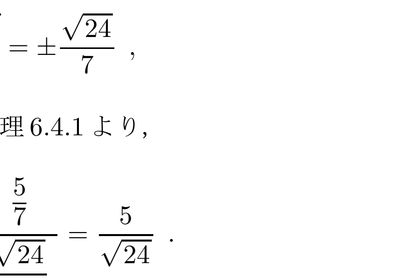
$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{3}{\sqrt{10}} \ .$$

終

問題 6.4.3　一般角 θ について $\tan\theta=\dfrac{3}{2}$ ， $\cos\theta\leq 0$ とします． $\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求めなさい．

xy 座標平面の点 $\mathrm{P}'=(x',y')$ が点 $\mathrm{P}=(x,y)$ と x 軸に関して対称であるとき,

$$x'=x \ , \quad y'=-y \ .$$



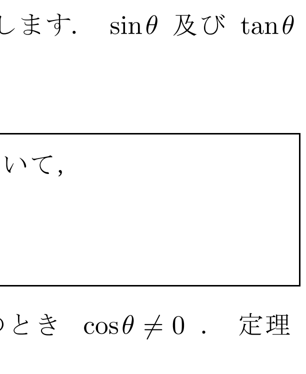
このことから次の定理が導かれます．

定理 6.4.4　任意の一般角 θ について,

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta \ , \qquad \cos(-\theta)=\cos\theta \ ,$$

θ が 90° の奇数倍でないとき　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ ．

証明　実数 r について $r>0$ とする．点 O を原点とする xy 座標平面の点 $\mathrm{P}=(x,y)$ を次のように定める：線分 OP は始線 Ox に対する角度 θ の線分で, $\overline{\mathrm{OP}}=r$ ．更に，点 $\mathrm{P}'=(x',y')$ を次のように定める：線分 OP$'$ は始線 Ox に対する角度 $-\theta$ の線分で， $\overline{\mathrm{OP}'}=r$ ． $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}'}$ で，始線 Ox に対する線分 OP の角度は θ , 線分 OP$'$ の角度は $-\theta$ なので,



点 $\mathrm{P}'=(x',y')$ と点 $\mathrm{P}=(x,y)$ とは x 軸に関して対称である．従って,

$$x'=x \ , \qquad y'=-y \ .$$

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ ， $\sin(-\theta)=\dfrac{y'}{r}$ なので,

$$\sin(-\theta)=\frac{y'}{r}=\frac{-y}{r}=-\frac{y}{r}=-\sin\theta \ .$$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ ， $\cos(-\theta)=\dfrac{x'}{r}$ なので

$$\cos(-\theta)=\frac{x'}{r}=\frac{x}{r}=\cos\theta \ .$$

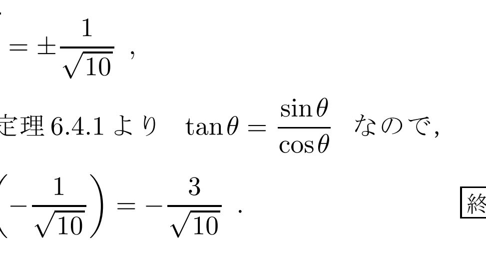
更に， θ が 90° の奇数倍でないとき， $x\neq 0$ かつ $x'\neq 0$ で， $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ ， $\tan(-\theta)=\dfrac{y'}{x'}$ なので,

$$\tan(-\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{x}=-\frac{y}{x}=-\tan\theta \ .$$

（証明終り）

定理 6.4.5　xy 座標平面の点 P について，原点 O から x 軸の向きに延びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であるとき， $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおくと

$$\mathrm{P}=(r\cos\theta, r\sin\theta) \ .$$



証明　$r=\overline{\mathrm{OP}}$ は線分の長さなので $r\geq 0$ ． $r=0$ のときと $r>0$ のときに分ける．

$r=0$ のとき， $\overline{\mathrm{OP}}=0$ なので $\mathrm{P}=\mathrm{O}$ ， $r=0$ より $(r\cos\theta, r\sin\theta)=(0,0)=\mathrm{O}$ ；よって $\mathrm{P}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ．

$r>0$ のとき， $\mathrm{P}=(x,y)$ とおく．余弦と正弦の定義より $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ ， $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ なので,

$$x=r\cos\theta \ , \qquad y=r\sin\theta \ .$$

よって $\mathrm{P}=(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ．　（証明終り）

例題　点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，線分 OP の始線 Ox に対する角度が 30° で $\overline{\mathrm{OP}}=5$ とする．点 P を求める．

$\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$ なので，定理 6.4.5 より,

$$\mathrm{P}=(5\cos 30^\circ, 5\sin 30^\circ)=\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) \ .$$

終

問題 6.4.4　点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，線分 OP の始線 Ox に対する角度が 60° で $\overline{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{3}$ とします．点 P を求めなさい．

定理 6.4.6　任意の一般角 θ について,

$$-1\leq\sin\theta\leq 1 \ , \qquad -1\leq\cos\theta\leq 1 \ .$$

証明　任意の一般角 θ について，定理 6.4.2 より $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ ． $S=\sin\theta$ とおき $C=\cos\theta$ とおくと $S^2+C^2=1$ ．これより $C^2=1-S^2$ ． C は実数なので $C^2\geq 0$ ，よって $1-S^2\geq 0$ ．この不等式を S に関する不等式と考えて解く； $S^2-1\leq 0$ ， $(S+1)(S-1)\leq 0$ ， $-1\leq S\leq 1$ ．故に $-1\leq\sin\theta\leq 1$ ．また, $S^2+C^2=1$ より $1-C^2=S^2\geq 0$ ，この不等式を C に関する不等式として解くと $-1\leq C\leq 1$ ．故に $-1\leq\cos\theta\leq 1$ ．　（証明終り）