

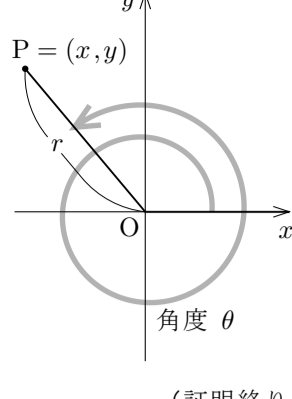
## §6.4 三角比の性質

**定理 6.4.1** 任意の一般角  $\theta$  について、

$$\theta \text{ が角度 } 90^\circ \text{ の奇数倍でないとき } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} .$$

**証明**  $xy$  座標平面において、原点  $O$  を極として  $x$  軸の向きに伸びる始線  $Ox$  に対する角度  $\theta$  の動径に属する点  $P = (x, y)$  ( $P \neq O$ ) をとり、 $\overline{OP} = r$  とおく。  $\theta$  が  $90^\circ$  の奇数倍でないとき、 $x \neq 0$  で、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$  の値があり、 $\cos \theta = \frac{x}{r} \neq 0$  で、

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan \theta .$$



(証明終り)

**定理 6.4.2** 任意の一般角  $\theta$  について

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 .$$

**証明**  $xy$  座標平面において、原点  $O$  を極として  $x$  軸の向きに伸びる始線  $Ox$  に対する角度  $\theta$  の動径に属する点  $P = (x, y)$  ( $P \neq O$ ) をとる。

$O = (0, 0)$  なので、定理 6.0 より、

$$\overline{OP}^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = x^2 + y^2 .$$

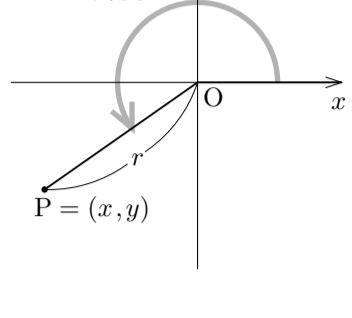
$\overline{OP} = r$  とおく。  $\overline{OP}^2 = r^2$  なので、

$$x^2 + y^2 = r^2 .$$

定義より  $\cos \theta = \frac{x}{r}$  ,  $\sin \theta = \frac{y}{r}$  なので、

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1 ,$$

つまり  $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$  .



(証明終り)

**例題** 一般角  $\theta$  について  $\sin \theta = \frac{5}{7}$  かつ  $\cos \theta \geq 0$  とする。  $\cos \theta$  及び  $\tan \theta$  の値を求めよ。

【解説】 定理 6.4.2 より  $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$  .  $\sin \theta = \frac{5}{7}$  なので、

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 ,$$

$$(\cos \theta)^2 = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49} ,$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{24}{49}} = \pm \frac{\sqrt{24}}{7} ,$$

$\cos \theta \geq 0$  なので  $\cos \theta = \frac{\sqrt{24}}{7}$  . 更に、定理 6.4.1 より、

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{\sqrt{24}}{7}} = \frac{5}{\sqrt{24}} .$$

終

**問題 6.4.1** 一般角  $\theta$  について  $\sin \theta = \frac{4}{5}$  かつ  $\cos \theta \leq 0$  とします。  $\cos \theta$  及び  $\tan \theta$  の値を求めなさい。

**問題 6.4.2** 一般角  $\theta$  について  $\cos \theta = \frac{1}{3}$  かつ  $\sin \theta \geq 0$  とします。  $\sin \theta$  及び  $\tan \theta$  の値を求めなさい。

**定理 6.4.3** 任意の一般角  $\theta$  について、

$$\theta \text{ が角度 } 90^\circ \text{ の奇数倍でないとき } 1 + (\tan \theta)^2 = \frac{1}{(\cos \theta)^2} .$$

**証明** 一般角  $\theta$  は角度  $90^\circ$  の奇数倍でないとする。このとき  $\cos \theta \neq 0$  . 定理 6.4.2 より  $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$  . 両辺を  $(\cos \theta)^2$  で割ると、

$$\frac{(\sin \theta)^2}{(\cos \theta)^2} + \frac{(\cos \theta)^2}{(\cos \theta)^2} = \frac{1}{(\cos \theta)^2} ,$$

この等式の左辺は

$$\frac{(\sin \theta)^2}{(\cos \theta)^2} + \frac{(\cos \theta)^2}{(\cos \theta)^2} = \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 + 1 = (\tan \theta)^2 + 1 = 1 + (\tan \theta)^2 ,$$

従って  $1 + (\tan \theta)^2 = \frac{1}{(\cos \theta)^2}$  .

(証明終り)

**例題** 一般角  $\theta$  について  $\tan \theta = 3$  かつ  $\cos \theta \leq 0$  とする。  $\cos \theta$  及び  $\sin \theta$  の値を求めよ。

【解説】 定理 6.4.3 より  $1 + (\tan \theta)^2 = \frac{1}{(\cos \theta)^2}$  なので、

$$\frac{1}{(\cos \theta)^2} = 1 + (\tan \theta)^2 = 1 + 3^2 = 10 ,$$

$$(\cos \theta)^2 = \frac{1}{10} ,$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{10}} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} ,$$

$\cos \theta \leq 0$  なので  $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$  . 更に、定理 6.4.1 より  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  なので、

$$\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{10}} .$$

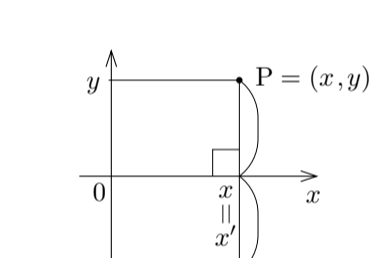
終

**問題 6.4.3** 一般角  $\theta$  について  $\tan \theta = \frac{3}{2}$  かつ  $\cos \theta \leq 0$  とします。  $\cos \theta$  及び  $\sin \theta$  の値を求めなさい。

$xy$  座標平面の点  $P' = (x', y')$  が点  $P = (x, y)$  と  $x$  軸に関して対称であるとき、

$$x' = x , \quad y' = -y .$$

このことから次の定理が導かれます。



**定理 6.4.4** 任意の一般角  $\theta$  について、

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta , \quad \cos(-\theta) = \cos \theta ,$$

$$\theta \text{ が } 90^\circ \text{ の奇数倍でないとき } \tan(-\theta) = -\tan \theta .$$

**証明** 実数  $r$  について  $r > 0$  とする。点  $O$  を原点とする  $xy$  座標平面の点  $P = (x, y)$  を次のように定める：線分  $OP$  は始線  $Ox$  に対する角度  $\theta$  の線分で、 $\overline{OP} = r$  . 更に、点  $P' = (x', y')$  を次のように定める：線分  $OP'$  は始線  $Ox$  に対する角度  $-\theta$  の線分で、 $\overline{OP'} = r$  .  $\overline{OP} = \overline{OP'}$  で、始線  $Ox$  に対する線分  $OP$  の角度は  $\theta$  , 線分  $OP'$  の角度は  $-\theta$  なので、点  $P' = (x', y')$  と点  $P = (x, y)$  とは  $x$  軸に関して対称である。従って、

$$x' = x , \quad y' = -y .$$

$\sin \theta = \frac{y}{r}$  ,  $\sin(-\theta) = \frac{y'}{r}$  なので、

$$\sin(-\theta) = \frac{y'}{r} = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin \theta .$$

$\cos \theta = \frac{x}{r}$  ,  $\cos(-\theta) = \frac{x'}{r}$  なので

$$\cos(-\theta) = \frac{x'}{r} = \frac{x}{r} = \cos \theta .$$

更に、 $\theta$  が  $90^\circ$  の奇数倍でないとき、 $x \neq 0$  かつ  $x' \neq 0$  で、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$  ,

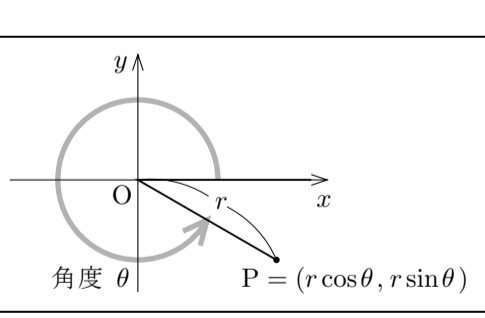
$\tan(-\theta) = \frac{y'}{x'}$  なので、

$$\tan(-\theta) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta .$$

(証明終り)

**定理 6.4.5**  $xy$  座標平面の点  $P$  について、原点  $O$  を極として  $x$  軸の向きに伸びる始線  $Ox$  に対する線分  $OP$  の角度が  $\theta$  であるとき、 $\overline{OP} = r$  とおくと

$$P = (r \cos \theta, r \sin \theta) .$$



**証明**  $r = \overline{OP}$  は線分の長さなので  $r \geq 0$  .  $r = 0$  のときと  $r > 0$  のときに分ける。

$r = 0$  のとき、 $\overline{OP} = 0$  なので  $P = O$  ,  $r = 0$  より  $(r \cos \theta, r \sin \theta) = (0, 0) = O$  ; よって  $P = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  .

$r > 0$  のとき、 $P = (x, y)$  とおく。余弦と正弦の定義より  $\cos \theta = \frac{x}{r}$  ,  $\sin \theta = \frac{y}{r}$  なので、

$$x = r \cos \theta , \quad y = r \sin \theta .$$

よって  $P = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  .

(証明終り)

**例題** 点  $O$  を原点とする  $xy$  座標平面の点  $P$  について、線分  $OP$  の始線  $Ox$  に対する角度が  $30^\circ$  で  $\overline{OP} = 5$  とする。点  $P$  を求めよ。

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} , \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ なので、定理 6.4.5 より、}$$

$$P = (5 \cos 30^\circ, 5 \sin 30^\circ) = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) .$$

終

**問題 6.4.4** 点  $O$  を原点とする  $xy$  座標平面の点  $P$  について、線分  $OP$  の始線  $Ox$  に対する角度が  $60^\circ$  で  $\overline{OP} = \frac{4}{3}$  とします。点  $P$  を求めなさい。

**定理 6.4.6** 任意の一般角  $\theta$  について、

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 , \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1 .$$

**証明** 任意の一般角  $\theta$  について、定理 6.4.2 より  $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$  .  $S = \sin \theta$  とおき  $C = \cos \theta$  とおくと  $S^2 + C^2 = 1$  . これより  $C^2 = 1 - S^2$  .  $C$  は実数なので  $C^2 \geq 0$  , よって  $1 - S^2 \geq 0$  . この不等式を  $S$  に関する不等式と考えて解く；  $S^2 - 1 \leq 0$  ,  $(S+1)(S-1) \leq 0$  ,  $-1 \leq S \leq 1$  . 故に  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$  . また、 $S^2 + C^2 = 1$  より  $1 - C^2 = S^2 \geq 0$  , この不等式を  $C$  に関する不等式として解くと  $-1 \leq C \leq 1$  . 故に  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  .

(証明終り)