

§6.5 加法定理

加法定理は重要な定理です。その証明はやや面倒なので次節で述べます。

定理 (正弦と余弦の加法定理) 任意の一般角 α と β について、

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta \quad (\text{複号同順}).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \quad (\text{複号同順}).$$

加法定理を用いて $\sin 15^\circ$ 及び $\cos 15^\circ$ を計算します。

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

加法定理を用いて $\sin 75^\circ$ 及び $\cos 75^\circ$ を計算します。

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

例題 一般角 θ について $\sin\theta = \frac{3}{5}$ かつ $\cos\theta = \frac{4}{5}$ とする。次の式の値を求める：

$\sin(\theta + 30^\circ)$, $\cos(\theta + 30^\circ)$ 。

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \quad \text{正弦の加法定理より,}$$

$$\sin(\theta + 30^\circ) = \sin\theta \cos 30^\circ + \cos\theta \sin 30^\circ = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}.$$

余弦の加法定理より、

$$\cos(\theta + 30^\circ) = \cos\theta \cos 30^\circ - \sin\theta \sin 30^\circ = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}. \quad \text{終}$$

問題 6.5.1 一般角 θ について $\sin\theta = \frac{3}{4}$ かつ $\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ とします。次の式の値

を求めなさい： $\sin(\theta + 60^\circ)$, $\cos(\theta + 60^\circ)$ 。

例題 一般角 θ について $\sin\theta = \frac{2}{3}$ かつ $\cos\theta < 0$ とする。次の式の値を求める：

$\sin(\theta - 60^\circ)$, $\cos(\theta - 60^\circ)$ 。

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \quad \text{なので,}$$

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9},$$

$\cos\theta < 0$ なので

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

また、 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。正弦の加法定理より、

$$\sin(\theta - 60^\circ) = \sin\theta \cos 60^\circ - \cos\theta \sin 60^\circ = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{15}}{6}.$$

余弦の加法定理より、

$$\cos(\theta - 60^\circ) = \cos\theta \cos 60^\circ + \sin\theta \sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{6}. \quad \text{終}$$

問題 6.5.2 一般角 θ について $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ かつ $\sin\theta < 0$ とします。次の式の値

を求めなさい： $\sin(\theta - 30^\circ)$, $\cos(\theta - 30^\circ)$ 。

加法定理から次の定理が導かれます (次の節で証明します)。

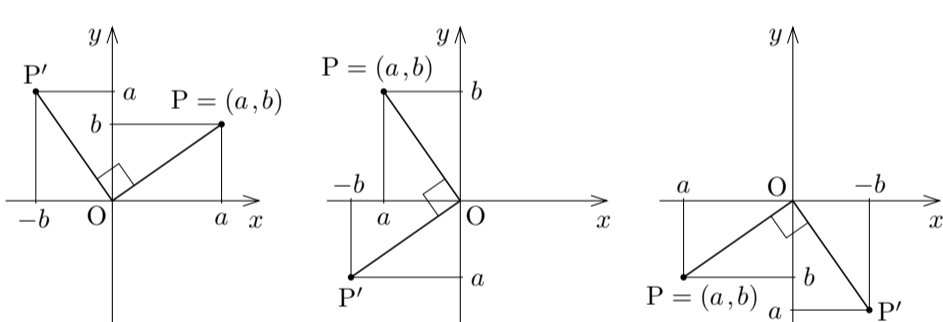
定理 6.5 任意の一般角 θ について、

$$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta, \quad \cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta.$$

この定理は次のように考えても分かります。 xy 座標平面において、原点 O を中心

にして点 $P = (a, b)$ を 90° だけ回転させた点を P' とおきます。このとき、次の図

のように、 $P' = (-b, a)$ となります。



線分 OP は始線 Ox に対する角度 θ の線

分で、 $\overline{OP} = 1$ とします。定理 6.4.4 より

$$P = (\cos\theta, \sin\theta).$$

点 P' は点 P を 90° だけ回転させた点です

から、始線 Ox に対する線分 OP' の角度は

$\theta + 90^\circ$ で、 $\overline{OP'} = 1$ 。定理 6.4.4 より

$$P' = (\cos(\theta + 90^\circ), \sin(\theta + 90^\circ)).$$

従って、

$$(\cos(\theta + 90^\circ), \sin(\theta + 90^\circ)) = P' = (-b, a), \quad (a, b) = P = (\cos\theta, \sin\theta).$$

これより、 $\cos(\theta + 90^\circ) = -b$, $b = \sin\theta$ なので、 $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$ 。また、

$\sin(\theta + 90^\circ) = a$, $a = \cos\theta$ なので、 $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$ 。

例題 次の式の値を求める： $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\tan 120^\circ$ 。

定理 6.5 の公式 $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$, $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$ を用いる。

$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 120^\circ = \cos(30^\circ + 90^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

また、

$$\tan 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}. \quad \text{終}$$

問題 6.5.3 次の式の値を求めなさい： $\sin 150^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\tan 150^\circ$ 。

正接の加法定理もあります。

定理 (正接の加法定理) 任意の一般角 α と β について、 $\tan\alpha$, $\tan\beta$ 及び、

$\tan(\alpha + \beta)$ または $\tan(\alpha - \beta)$ の値があるとき、

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}, \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}.$$

例題 一般角 θ について $\tan\theta = 5$ とする。次の式の値を求める： $\tan(\theta + 60^\circ)$,

$\tan(\theta - 60^\circ)$ 。分母に根号が現れるときは分母を有理化する。

正接の加法定理を用いる。

$$\begin{aligned} \tan(\theta + 60^\circ) &= \frac{\tan\theta + \tan 60^\circ}{1 - \tan\theta \tan 60^\circ} = \frac{5 + \sqrt{3}}{1 - 5\sqrt{3}} = \frac{(5 + \sqrt{3})(1 + 5\sqrt{3})}{(1 - 5\sqrt{3})(1 + 5\sqrt{3})} \\ &= \frac{5 + 25\sqrt{3} + \sqrt{3} + 5\sqrt{3}^2}{1^2 - (5\sqrt{3})^2} = \frac{5 + 26\sqrt{3} + 15}{1 - 75} = -\frac{20 + 26\sqrt{3}}{74} \\ &= -\frac{10 + 13\sqrt{3}}{37}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan(\theta - 60^\circ) &= \frac{\tan\theta - \tan 60^\circ}{1 + \tan\theta \tan 60^\circ} = \frac{5 - \sqrt{3}}{1 + 5\sqrt{3}} = \frac{(5 - \sqrt{3})(1 - 5\sqrt{3})}{(1 + 5\sqrt{3})(1 - 5\sqrt{3})} \\ &= \frac{5 - 25\sqrt{3} - \sqrt{3} + 5\sqrt{3}^2}{1^2 - (5\sqrt{3})^2} = \frac{5 - 26\sqrt{3} + 15}{1 - 75} = -\frac{20 - 26\sqrt{3}}{74} \\ &= \frac{13\sqrt{3} - 10}{37}. \quad \text{終} \end{aligned}$$

問題 6.5.4 一般角 θ について $\tan\theta = 2$ とします。次の式の値を求めなさい：

$\tan(\theta + 30^\circ)$, $\tan(\theta - 30^\circ)$ 。分母に根号が現れるときは分母を有理化しなさい。