§6.5　加法定理

加法定理は重要な定理です．その証明はやや面倒なので次節で述べます．

> **定理**（正弦と余弦の加法定理）　任意の一般角 α と β とについて，
> $$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\quad（複号同順）．$$
> $$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\quad（複号同順）．$$

例題　一般角 θ について $\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=\frac{4}{5}$ とする．次の式の値を求める：$\sin(\theta+30^\circ)$，$\cos(\theta+30^\circ)$．

$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$．正弦の加法定理より，

$$\sin(\theta+30^\circ)=\sin\theta\cos 30^\circ+\cos\theta\sin 30^\circ=\frac{3}{5}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{5}\frac{1}{2}$$
$$=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}\ .$$

余弦の加法定理より，

$$\cos(\theta+30^\circ)=\cos\theta\cos 30^\circ-\sin\theta\sin 30^\circ=\frac{4}{5}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{5}\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}\ .$$

終

問題 6.5.1　一般角 θ について $\sin\theta=\frac{3}{4}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$ とします．次の式の値を求めなさい：$\sin(\theta+60^\circ)$，$\cos(\theta+60^\circ)$．

例題　一般角 θ について $\sin\theta=\frac{2}{3}$，$\cos\theta<0$ とする．次の式の値を求める：$\sin(\theta-60^\circ)$，$\cos(\theta-60^\circ)$．

$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ なので，

$$(\cos\theta)^2=1-(\sin\theta)^2=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\ ,$$

$\cos\theta<0$ なので

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{5}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}\ .$$

また，$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$．正弦の加法定理より，

$$\sin(\theta-60^\circ)=\sin\theta\cos 60^\circ-\cos\theta\sin 60^\circ=\frac{2}{3}\frac{1}{2}-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{2+\sqrt{15}}{6}\ .$$

余弦の加法定理より，

$$\cos(\theta-60^\circ)=\cos\theta\cos 60^\circ+\sin\theta\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{5}}{3}\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}\ .$$

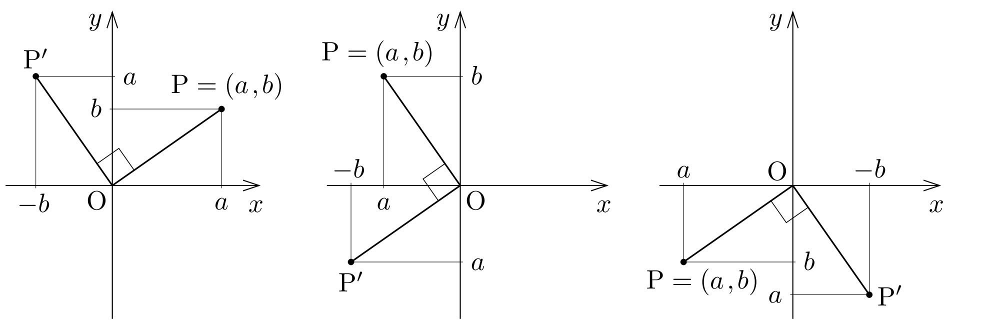
終

問題 6.5.2　一般角 θ について $\cos\theta=-\frac{3}{4}$，$\sin\theta<0$ とします．次の式の値を求めなさい：$\sin(\theta-30^\circ)$，$\cos(\theta-30^\circ)$．

加法定理から次の定理が導かれます（次の節で証明します）．

> **定理 6.5**　任意の一般角 θ について，
> $$\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta\ ,\qquad \cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta\ .$$

この定理は次のように考えても分かります．xy 座標平面において，原点 O を中心にして点 $\mathrm{P}=(a,b)$ を 90° だけ回転させた点を P' とおきます．このとき，次の図のように，$\mathrm{P}'=(-b,a)$ となります．

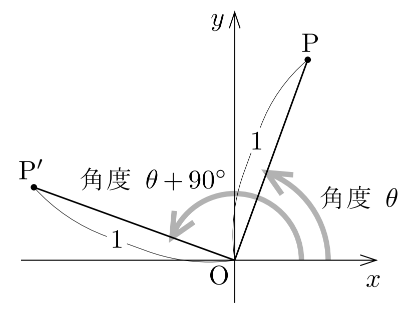


線分 OP は始線 Ox に対する角度 θ の線分で，$\overline{\mathrm{OP}}=1$ とします．定理 6.4.4 より

$$\mathrm{P}=(\cos\theta,\sin\theta)\ .$$

点 P' は点 P を 90° だけ回転させた点ですから，始線 Ox に対する線分 OP' の角度は $\theta+90^\circ$ で，$\overline{\mathrm{OP}'}=1$．定理 6.4.4 より

$$\mathrm{P}'=\big(\cos(\theta+90^\circ),\sin(\theta+90^\circ)\big)\ .$$



従って，

$$\big(\cos(\theta+90^\circ),\sin(\theta+90^\circ)\big)=\mathrm{P}'=(-b,a)\ ,\qquad (a,b)=\mathrm{P}=(\cos\theta,\sin\theta)\ .$$

これより，$\cos(\theta+90^\circ)=-b$，$b=\sin\theta$ なので，$\cos(\theta+90^\circ)=-\sin x$．また，$\sin(\theta+90^\circ)=a$，$a=\cos\theta$ なので，$\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$．

例題　次の値を求める：$\sin 120^\circ$，$\cos 120^\circ$，$\tan 120^\circ$．

定理 6.5 の公式 $\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$，$\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta$ を用いる．

$$\sin 120^\circ=\sin(30^\circ+90^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$
$$\cos 120^\circ=\cos(30^\circ+90^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}\ .$$

また，

$$\tan 120^\circ=\frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}\ .$$

終

問題 6.5.3　次の値を求めなさい：$\sin 150^\circ$，$\cos 150^\circ$，$\tan 150^\circ$．

正接の加法定理もあります．

> **定理**（正接の加法定理）　任意の一般角 α と β とについて，$\tan\alpha$，$\tan\beta$ 及び，$\tan(\alpha+\beta)$ または $\tan(\alpha-\beta)$ の値があるとき，
> $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\ ,\qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\ .$$

例題　一般角 θ について $\tan\theta=5$ とする．次の式の値を求める：$\tan(\theta+60^\circ)$，$\tan(\theta-60^\circ)$．分母に根号が現れるときは分母を有理化する．

正接の加法定理を用いる．

$$\tan(\theta+60^\circ)=\frac{\tan\theta+\tan 60^\circ}{1-\tan\theta\tan 60^\circ}=\frac{5+\sqrt{3}}{1-5\sqrt{3}}=\frac{\big(5+\sqrt{3}\big)\big(1+5\sqrt{3}\big)}{\big(1-5\sqrt{3}\big)\big(1+5\sqrt{3}\big)}$$
$$=\frac{5+25\sqrt{3}+\sqrt{3}+5\sqrt{3}^{\,2}}{1^2-\big(5\sqrt{3}\big)^2}=\frac{5+26\sqrt{3}+15}{1-75}=-\frac{20+26\sqrt{3}}{74}$$
$$=-\frac{10+13\sqrt{3}}{37}\ .$$

$$\tan(\theta-60^\circ)=\frac{\tan\theta-\tan 60^\circ}{1+\tan\theta\tan 60^\circ}=\frac{5-\sqrt{3}}{1+5\sqrt{3}}=\frac{\big(5-\sqrt{3}\big)\big(1-5\sqrt{3}\big)}{\big(1+5\sqrt{3}\big)\big(1-5\sqrt{3}\big)}$$
$$=\frac{5-25\sqrt{3}-\sqrt{3}+5\sqrt{3}^{\,2}}{1^2-\big(5\sqrt{3}\big)^2}=\frac{5-26\sqrt{3}+15}{1-75}=-\frac{20-26\sqrt{3}}{74}$$
$$=\frac{13\sqrt{3}-10}{37}\ .$$

終

問題 6.5.4　一般角 θ について $\tan\theta=2$ とします．次の式の値を求めなさい：$\tan(\theta+30^\circ)$，$\tan(\theta-30^\circ)$．分母に根号が現れるときは分母を有理化しなさい．