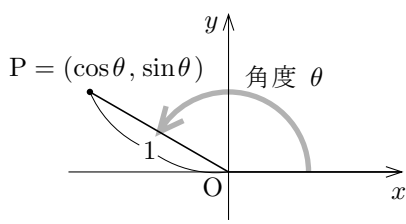


## § 6.6 加法定理の証明

定理 6.4.4 から次のことが分かります：点  $O$  を原点とする  $xy$  座標平面の点  $P$  について、 $\overline{OP} = 1$  で線分  $OP$  の始線  $Ox$  に対する角度が  $\theta$  であるとき、 $P = (\cos\theta, \sin\theta)$  . このことを用いてまず余弦の加法定理を証明します。



**定理 (余弦の加法定理)** 任意の一般角  $\alpha$  と  $\beta$  について

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \quad (\text{複号同順}) .$$

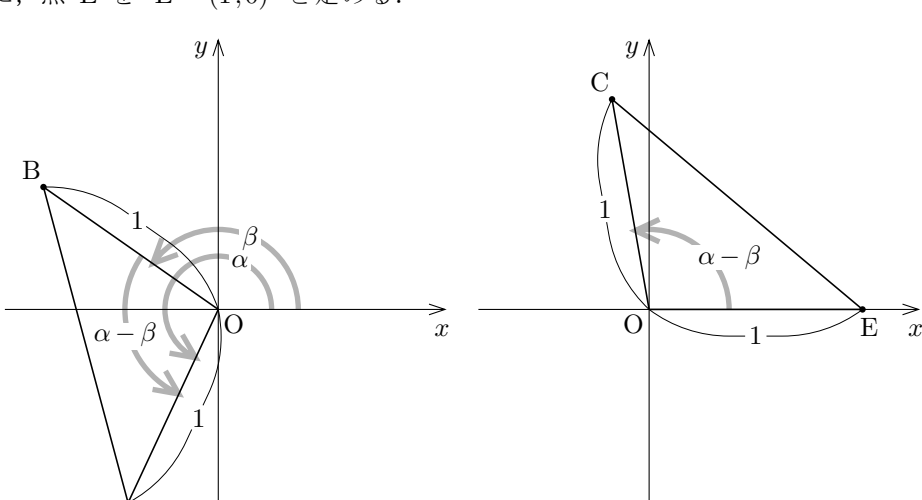
**証明** 点  $O$  を原点とする  $xy$  座標平面において、3点  $A, B, C$  を次のように定める：  
 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 1$  で、

線分  $OA$  は 始線  $Ox$  に対する角度  $\alpha$  の線分、

線分  $OB$  は 始線  $Ox$  に対する角度  $\beta$  の線分、

線分  $OC$  は 始線  $Ox$  に対する角度  $(\alpha - \beta)$  の線分。

更に、点  $E$  を  $E = (1, 0)$  と定める。



定理 6.4.4 より次のことが成り立つ：

$$A = (\cos\alpha, \sin\alpha), \quad B = (\cos\beta, \sin\beta), \quad C = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)) .$$

線分  $OB$  と線分  $OA$  , 及び線分  $OE$  と線分  $OC$  との位置関係は次のようになる：

点  $O$  を中心に線分  $OB$  を  $(\alpha - \beta)$  の角度だけ回転させた線分が  $OA$  であり、

点  $O$  を中心に線分  $OE$  を  $(\alpha - \beta)$  の角度だけ回転させた線分が  $OC$  である。

従って角  $AOB$  と角  $COE$  とは同じ大きさである。更に  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OE}$  なので、三角形  $AOB$  と三角形  $COE$  とは合同である。よって  $\overline{AB} = \overline{CE}$  なので、

$$\overline{AB}^2 = \overline{CE}^2 .$$

$A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$  ,  $B = (\cos\beta, \sin\beta)$  なので、定理 6.0 より、

$$\overline{AB}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 .$$

この等式の右辺を計算する。  $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$  ,  $(\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1$  なので、

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 \\ &= (\cos\alpha)^2 - 2\cos\alpha \cos\beta + (\cos\beta)^2 + (\sin\alpha)^2 - 2\sin\alpha \sin\beta + (\sin\beta)^2 \\ &= (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2 - 2\cos\alpha \cos\beta - 2\sin\alpha \sin\beta \\ &= 2 - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) . \end{aligned}$$

$C = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$  ,  $E = (1, 0)$  なので、定理 6.0 より、

$$\overline{CE}^2 = \{\cos(\alpha - \beta) - 1\}^2 + \{\sin(\alpha - \beta)\}^2 .$$

この等式の右辺を計算する。  $\{\sin(\alpha - \beta)\}^2 + \{\cos(\alpha - \beta)\}^2 = 1$  なので、

$$\begin{aligned} \overline{CE}^2 &= \{\cos(\alpha - \beta) - 1\}^2 + \{\sin(\alpha - \beta)\}^2 \\ &= \{\cos(\alpha - \beta)\}^2 - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \{\sin(\alpha - \beta)\}^2 \\ &= 1 + \{\sin(\alpha - \beta)\}^2 + \{\cos(\alpha - \beta)\}^2 - 2\cos(\alpha - \beta) \\ &= 2 - 2\cos(\alpha - \beta) . \end{aligned}$$

$\overline{CE}^2 = \overline{AB}^2$  なので、

$$\begin{aligned} 2 - 2\cos(\alpha - \beta) &= 2 - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) , \\ -2\cos(\alpha - \beta) &= -2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) , \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta . \end{aligned}$$

また、この式において  $\beta$  を  $-\beta$  におきかえると

$$\cos\{\alpha - (-\beta)\} = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta) ,$$

定理 6.4.3 より  $\cos(-\beta) = \cos\beta$  ,  $\sin(-\beta) = -\sin\beta$  なので、

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta .$$

(証明終り)

**定理 6.5** 任意の一般角  $\theta$  について、 $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$  ,  $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$  .

**証明** 余弦の加法定理より

$$\cos(\theta + 90^\circ) = \cos\theta \cos 90^\circ - \sin\theta \sin 90^\circ .$$

$\cos 90^\circ = 0$  ,  $\sin 90^\circ = 1$  なので

$$\cos\theta \cos 90^\circ - \sin\theta \sin 90^\circ = -\sin\theta ,$$

従って  $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$  . 更に、この等式において  $\theta$  を  $-(\theta + 90^\circ)$  でおき替える：

$$\cos\{-(\theta + 90^\circ) + 90^\circ\} = -\sin\{-(\theta + 90^\circ)\} .$$

この等式の左辺は、定理 6.4.3 より、

$$\cos\{-(\theta + 90^\circ) + 90^\circ\} = \cos(-\theta - 90^\circ + 90^\circ) = \cos(-\theta) = \cos\theta ,$$

右辺は、定理 6.4.3 より、

$$-\sin\{-(\theta + 90^\circ)\} = -\{-\sin(\theta + 90^\circ)\} = \sin(\theta + 90^\circ) .$$

よって  $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$  .

(証明終り)

**定理 (正弦の加法定理)** 任意の一般角  $\alpha$  と  $\beta$  について

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta \quad (\text{複号同順}) .$$

**証明** 余弦の加法定理より

$$\cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} = \cos\alpha \cos(\beta + 90^\circ) - \sin\alpha \sin(\beta + 90^\circ) .$$

定理 6.6 より、

$$\cos\{\alpha + (\beta + 90^\circ)\} = \cos\{(\alpha + \beta) + 90^\circ\} = -\sin(\alpha + \beta) ,$$

$$\cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin\alpha , \quad \sin(\alpha + 90^\circ) = \cos\alpha ,$$

従って

$$-\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha(-\sin\beta) - \sin\alpha \cos\beta ,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta .$$

また、この式において  $\beta$  を  $-\beta$  におき替えると

$$\sin\{\alpha + (-\beta)\} = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) .$$

定理 6.4.3 より  $\cos(-\beta) = \cos\beta$  ,  $\sin(-\beta) = -\sin\beta$  なので、

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta .$$

(証明終り)

**定理 (正接の加法定理)** 任意の一般角  $\alpha$  と  $\beta$  について、 $\tan\alpha$  ,  $\tan\beta$  及び、 $\tan(\alpha + \beta)$  または  $\tan(\alpha - \beta)$  の値があるとき、

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta} \quad (\text{複号同順}) .$$

**証明** 正弦及び余弦の加法定理より、

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta} \\ &= \frac{\frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} \\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} . \end{aligned}$$

同様にして等式  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$  も導かれる。

(証明終り)