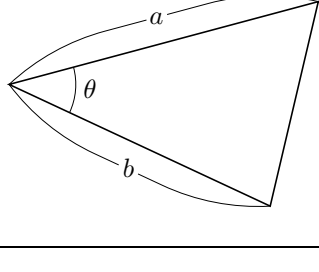


§6.7 三角形の面積と正弦定理

定理 6.7 三角形の2辺の各々の長さが a と b とでその2辺が成す内角の大きさが θ であるとき、この三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

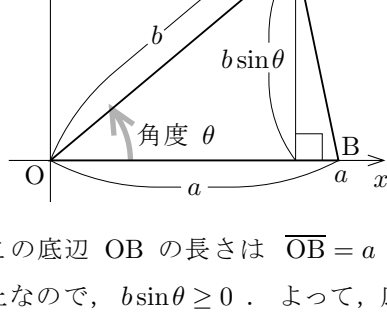


証明 θ は三角形の内角なので $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. 正の実数 a, b 及び角度 θ に対して、 xy 座標平面において点 O, A, B を次のように定める: $O = (0, 0)$; $B = (a, 0)$; 始線 Ox に対する線分 OA の角度は θ であり、 $\overline{OA} = b$. このとき、

$$\overline{OB} = a, \quad \overline{OA} = b, \quad \angle AOB = \theta.$$

従ってこの三角形 OAB は元の三角形と合同なので、面積も同じである. 始線 Ox の向きに対する線分 OA の角度は θ で $\overline{OA} = b$ なので、定理 6.4.4 より

$$A = (b\cos\theta, b\sin\theta).$$



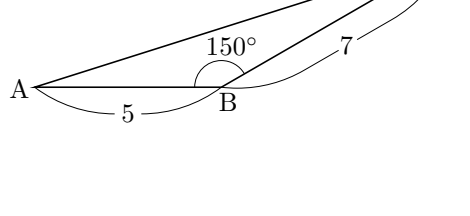
三角形 OAB において辺 OB を底辺と考える. この底辺 OB の長さは $\overline{OB} = a$. また、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より点 A の y 座標は 0 以上なので、 $b\sin\theta \geq 0$. よって、底辺 OB に対する三角形 OAB の高さは点 A の y 座標 $b\sin\theta$ である. 従って三角形 OAB の面積 S は

$$S = \frac{a \cdot b\sin\theta}{2} = \frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

(証明終り)

この定理より、三角形の2辺の長さとその2辺が成す内角の大きさからその三角形の面積を計算できます.

例 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\overline{AB} = 5$ かつ $\overline{BC} = 7$ かつ $\angle ABC = 150^\circ$ とする.



$$\sin 150^\circ = \sin(60^\circ + 90^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

定理 6.7 より、三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin 150^\circ = \frac{35}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{4}.$$

終

問題 6.7.1 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\overline{AC} = 3$ かつ $\overline{BC} = 5$ かつ $\angle ACB = 120^\circ$ とします. 三角形 ABC の面積を求めなさい.

定理 6.7 より次の定理が導かれます.

定理 (正弦定理) 平面上の相異なる3点 A, B, C

を頂点とする三角形 ABC において、

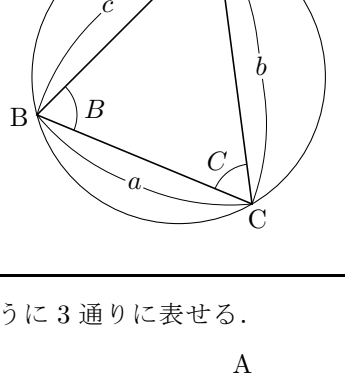
$$\angle BAC = A, \quad \angle ABC = B, \quad \angle ACB = C,$$

$$\overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = b, \quad \overline{AB} = c$$

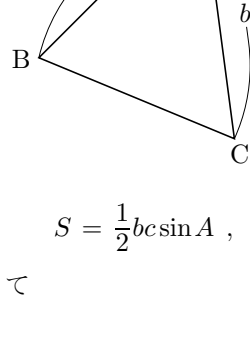
とおく; 更に、三角形 ABC の外接円の半径を R

とおく. このとき、

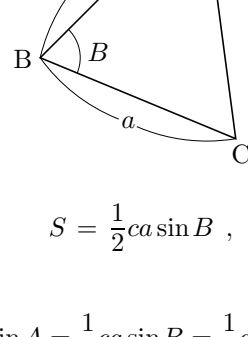
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$



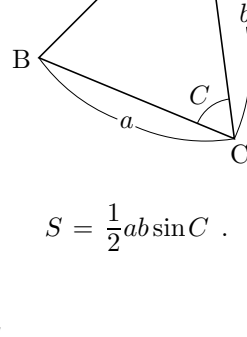
証明 定理 6.7 より、三角形 ABC の面積 S を次のように3通りに表せる.



$$S = \frac{1}{2}bc\sin A,$$



$$S = \frac{1}{2}ca\sin B,$$



$$S = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

よって

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C,$$

$$bc\sin A = ca\sin B = ab\sin C.$$

従って、

$$\frac{abc}{bc\sin A} = \frac{abc}{ca\sin B} = \frac{abc}{ab\sin C},$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

三角形 ABC の3個の内角のうち少なくとも2個は鋭角²⁾である. 今仮に三角形 ABC の内角 A が鋭角であるとする. 三角形 ABC の外接円の中心を O とおき、外接円の半径を R とおく. この外接円において、弧 BC に対する中心角の大きさ $\angle BOC$ は弧 BC に対する円周角の大きさ $\angle BAC$ の2倍である:

$$\angle BOC = 2\angle BAC.$$

線分 BC の中点を D とおく. $\overline{OB} = \overline{OC} = R$

なので、三角形 OBC は二等辺三角形である.

従って、

$$\angle BOD = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2} \cdot 2\angle BAC = \angle BAC$$

$$= A.$$

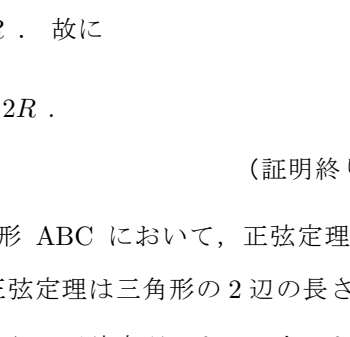
また、角 ODB は直角なので、

$$\sin \angle BOD = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\frac{\overline{BC}}{2}}{R} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}.$$

よって $\sin A = \sin \angle BOD = \frac{a}{2R}$ なので、 $\frac{a}{\sin A} = 2R$. 故に

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

(証明終り)



平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、正弦定理より、例えば $\frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} = \frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC}$. このように、正弦定理は三角形の2辺の長さとその2個の内角の大きさとの間の関係を述べます. ですから、正弦定理によって次のような計算ができます.

- 三角形の1辺の長さとその2個の内角の大きさから他の辺の長さを求める.
- 三角形の2辺の長さとその1個の内角の大きさから他の内角の大きさを求める.

例題 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\overline{AC} = 10$

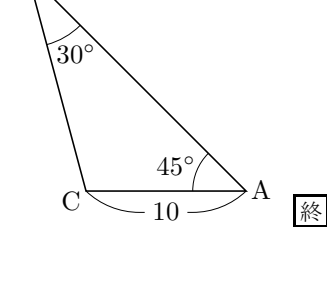
かつ $\angle BAC = 45^\circ$ かつ $\angle ABC = 30^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求める.

正弦定理より $\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC}$ なので、

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} \sin \angle BAC$$

$$= \frac{10}{\sin 30^\circ} \sin 45^\circ = \frac{10}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 10\sqrt{2}.$$



終

問題 6.7.2 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\overline{AB} = \sqrt{6}$ かつ $\angle BAC = 45^\circ$ かつ $\angle ACB = 60^\circ$ とします. 辺 BC の長さを求めなさい.

例題 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\overline{AB} = \sqrt{3}$ かつ $\angle BAC = 75^\circ$

かつ $\angle ABC = 45^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求める.

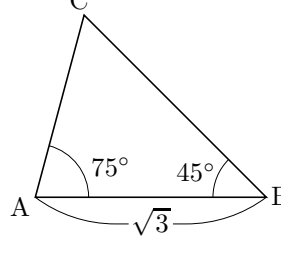
$$\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ$$

$$= 60^\circ.$$

正弦定理より $\frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB}$ なので、

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

終



問題 6.7.3 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\overline{AC} = 6$ かつ $\angle BAC = 15^\circ$ かつ $\angle ACB = 45^\circ$ とします. 辺 AB の長さを求めなさい.

例題 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\overline{AB} = 1$

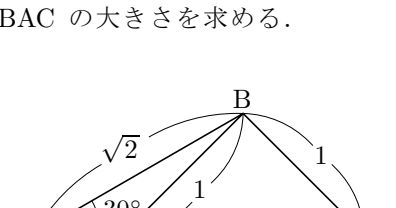
かつ $\overline{BC} = \sqrt{2}$ かつ $\angle ACB = 30^\circ$ とする. 内角 BAC の大きさを求める.

正弦定理より $\frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} = \frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC}$ なので、

$$\sin \angle BAC = \overline{BC} \cdot \frac{\sin \angle ACB}{\overline{AB}}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{1} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



これより $\angle BAC = 45^\circ$ または $\angle BAC = 135^\circ$. どちらの場合もあり得る.

終

問題 6.7.4 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\overline{AC} = \sqrt{3}$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{2}$ かつ $\angle BAC = 45^\circ$ とします. 内角 ABC の大きさを求めなさい.

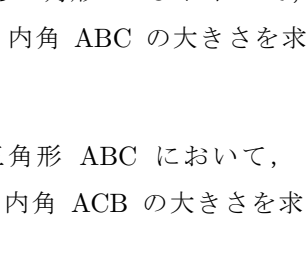
例題 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{AC} = \sqrt{3}$ かつ $\angle ABC = 120^\circ$ とする. 内角 ACB の大きさを求める.

$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

正弦定理より $\frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB}$ なので、

$$\sin \angle ACB = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\sin \angle ABC}{\sin \angle ACB} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 120^\circ}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



これより $\angle ACB = 45^\circ$ または $\angle ACB = 135^\circ$. $\angle ABC + \angle ACB \leq 180^\circ$ より $\angle ACB \leq 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ$ なので、 $\angle ACB = 45^\circ$.

終

問題 6.7.5 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{BC} = 1$ かつ $\angle ACB = 135^\circ$ とします. 内角 BAC の大きさを求めなさい.

²⁾ 角度が直角より小さい角のこと.