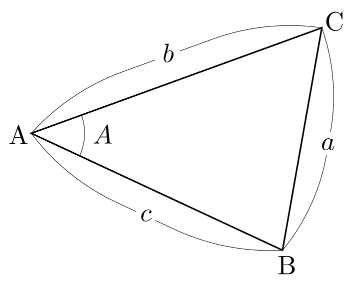
# § 6.8　余弦定理

**定理**（余弦定理）　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，

$$\overline{\mathrm{AB}} = c \ , \qquad \overline{\mathrm{BC}} = a \ ,$$
$$\overline{\mathrm{CA}} = b \ , \qquad \angle\mathrm{BAC} = A$$

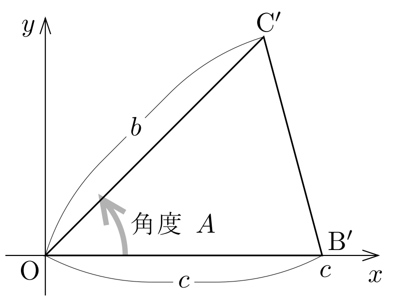
とおくと，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \ .$$




**証明**　$xy$ 座標平面において点 O, B′, C′ を次のように定める：　O = (0, 0)　；B′ = $(c, 0)$　；始線 O$x$ に対する線分 OC′ の角度は $A$ で，$\overline{\mathrm{OC'}} = b$ ．このとき，

$$\overline{\mathrm{OB'}} = c = \overline{\mathrm{AB}} \ ,$$
$$\overline{\mathrm{OC'}} = b = \overline{\mathrm{AC}} \ ,$$
$$\angle\mathrm{C'OB'} = A = \angle\mathrm{BAC} \ .$$




従って三角形 OB′C′ と三角形 ABC とは合同である．よって

$$a = \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{B'C'}} \ .$$

$\overline{\mathrm{OC'}} = b$ で，始線 O$x$ に対する線分 OC′ の角度は $A$ なので，定理 6.4.4 より

$$\mathrm{C'} = (b\cos A, b\sin A) \ .$$

更に B′ = $(c, 0)$ なので，定理 6.0 より，

$$\overline{\mathrm{B'C'}}^2 = (b\cos A - c)^2 + (b\sin A)^2 = b^2(\cos A)^2 - 2bc\cos A + c^2 + b^2(\sin A)^2$$
$$= b^2\{(\sin A)^2 + (\cos A)^2\} + c^2 - 2bc\cos A \ .$$

定理 6.4.2 より $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$ なので，

$$b^2\{(\sin A)^2 + (\cos A)^2\} + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \ .$$

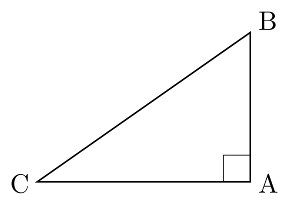
よって

$$\overline{\mathrm{B'C'}}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \ .$$

$\overline{\mathrm{B'C'}} = \overline{\mathrm{BC}} = a$ なので，$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ．　（証明終り）

相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，余弦定理より，

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{BAC} \ .$$




ここで，内角 BAC が直角であるとすると，$\angle\mathrm{BAC} = 90°$ より $\cos\angle\mathrm{BAC} = \cos 90° = 0$ なので，

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 \ .$$

これはピタゴラスの定理（三平方の定理）です．このように，ピタゴラスの定理は余弦定理の特殊な場合です．

平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，余弦定理より，例えば $\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\sin\angle\mathrm{BAC}$ ．このように，余弦定理は三角形の 3 辺の長さと 1 個の内角の大きさとの間の関係を述べます．ですから，余弦定理によって次のような計算ができます．

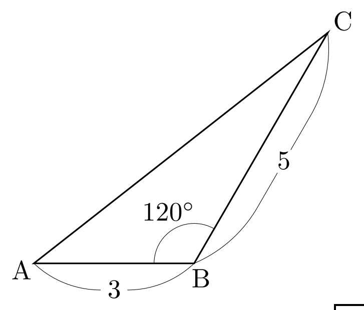
・三角形の 2 辺の長さと 1 個の内角の大きさとから他の辺の長さを求める．
・三角形の 3 辺の長さから内角の大きさを求める．

例題　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\overline{\mathrm{AB}} = 3$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 5$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 120°$ とする．辺 AC の長さを求める．

$$\cos 120° = \cos(30° + 90°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2} \ .$$

余弦定理より

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$= 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 120°$$
$$= 9 + 25 - 30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= 49 \ .$$




$\overline{\mathrm{AC}} \geq 0$ なので $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{49} = 7$ ．　終

問題 6.8.1　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\overline{\mathrm{AB}} = 4$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 30°$ とします．辺 BC の長さを求めなさい．

問題 6.8.2　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\overline{\mathrm{AC}} = 5$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 150°$ とします．辺 AB の長さを求めなさい．

例題　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\overline{\mathrm{AB}} = 8$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 7$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 60°$ とする．$\overline{\mathrm{BC}}$ を求める．

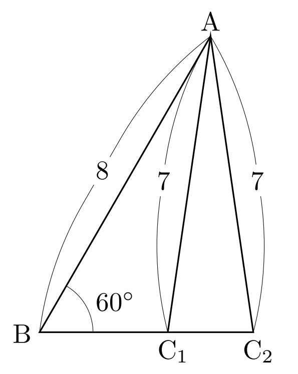
〔解説〕 余弦定理より

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{ABC} \ .$$

$a = \overline{\mathrm{BC}}$ とおくと，

$$49 = a^2 + 64 - 2\cdot 8\cdot a\cdot\cos 60° \ ,$$

$a^2 - 8a + 15 = 0$ ，$(a-3)(a-5) = 0$ ，$a = 3$ または $a = 5$ ．つまり $\overline{\mathrm{BC}} = 3$ または $\overline{\mathrm{BC}} = 5$ ．どちらの場合もあり得る．



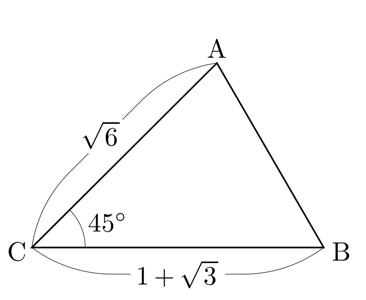

終

問題 6.8.3　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\overline{\mathrm{AB}} = 5$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{13}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 45°$ とします．$\overline{\mathrm{AC}}$ を求めなさい．

例題　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{6}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 1 + \sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 45°$ とする．この三角形 ABC の内角 ∠ABC の大きさを求める．

余弦定理より

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AC}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{ACB}$$
$$= \sqrt{6}^{\,2} + \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{6}\left(1 + \sqrt{3}\right)\cos 45°$$
$$= 6 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{6}\left(1 + \sqrt{3}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= 10 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 6$$
$$= 4 \ ,$$




よって $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{4} = 2$ ．余弦定理より $\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{ABC}$ なので，

$$\sqrt{6}^{\,2} = 2^2 + \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot 2\left(1 + \sqrt{3}\right)\cos\angle\mathrm{ABC} \ ,$$
$$6 = 4 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4\left(1 + \sqrt{3}\right)\cos\angle\mathrm{ABC} \ ,$$
$$4\left(1 + \sqrt{3}\right)\cos\angle\mathrm{ABC} = 2 + 2\sqrt{3} \ ,$$
$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4\left(1 + \sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2} \ ,$$

よって $\angle\mathrm{ABC} = 60°$ ．　終

問題 6.8.4　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\overline{\mathrm{AC}} = 2$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{3} - 1$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 120°$ とします．この三角形 ABC の内角 ∠ABC の大きさを求めなさい．

例題　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\overline{\mathrm{AB}} = 4$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 5$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 7$ とする．内角 BAC の大きさ ∠BAC の余弦 cos∠BAC を求め，内角 BAC の大きさ ∠BAC の正弦 sin∠BAC を求め，三角形 ABC の面積を求める．

〔解説〕 余弦定理より $\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{BAC}$ なので，

$$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cos\angle\mathrm{BAC} \ ,$$
$$40\cos\angle\mathrm{BAC} = 8 \ ,$$
$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{5} \ .$$

$(\sin\angle\mathrm{BAC})^2 + (\cos\angle\mathrm{BAC})^2 = 1$ なので，

$$(\sin\angle\mathrm{BAC})^2 = 1 - (\cos\angle\mathrm{BAC})^2 = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25} \ .$$

$0° \leq \angle\mathrm{BAC} \leq 180°$ なので $\sin\angle\mathrm{BAC} \geq 0$ ，よって

$$\sin\angle\mathrm{BAC} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \ .$$

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6} \ .$$

終

問題 6.8.5　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\overline{\mathrm{AB}} = 4$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 7$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 9$ とします．

(1) 内角 BAC の大きさ ∠BAC の余弦 cos∠BAC を求めなさい．
(2) 内角 BAC の大きさ ∠BAC の正弦 sin∠BAC を求めなさい．
(3) 三角形 ABC の面積を求めなさい．