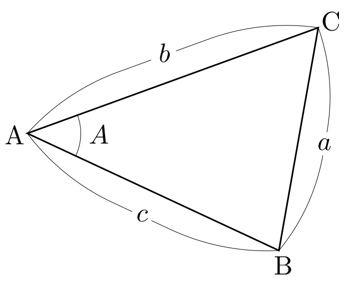
§6.8　余弦定理

定理（余弦定理）　平面上の相異なる３点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，

$$\overline{\mathrm{AB}}=c\ ,\qquad \overline{\mathrm{BC}}=a\ ,$$
$$\overline{\mathrm{CA}}=b\ ,\qquad \angle\mathrm{A}=A\ ,$$

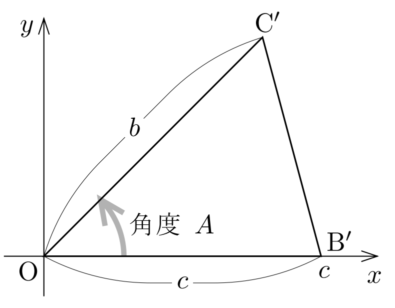
とおくと，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\ .$$



証明　xy 座標平面において点 O, B′, C′ を次のように定める：　O $=(0,0)$　; B′ $=(c,0)$　; 始線 Ox に対する線分 OC′ の角度は A で，$\overline{\mathrm{OC'}}=b$ ．このとき，

$$\overline{\mathrm{OB'}}=c=\overline{\mathrm{AB}}\ ,$$
$$\overline{\mathrm{OC'}}=b=\overline{\mathrm{AC}}\ ,$$
$$\angle\mathrm{C'OB'}=A=\angle\mathrm{A}\ .$$



従って三角形 OB′C′ と三角形 ABC とは合同である．よって

$$a=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{B'C'}}\ .$$

$\overline{\mathrm{OC'}}=b$ で，始線 Ox に対する線分 OC′ の角度は A なので，定理6.4.4より

$$\mathrm{C'}=(b\cos A,b\sin A)\ .$$

更に B′ $=(c,0)$ なので，定理6.0より，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{B'C'}}^2&=(b\cos A-c)^2+(b\sin A)^2=b^2(\cos A)^2-2bc\cos A+c^2+b^2(\sin A)^2\\&=b^2\{(\sin A)^2+(\cos A)^2\}+c^2-2bc\cos A\ .\end{aligned}$$

定理6.4.2より $(\sin A)^2+(\cos A)^2=1$ なので，

$$b^2\{(\sin A)^2+(\cos A)^2\}+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc\cos A\ .$$

よって

$$\overline{\mathrm{B'C'}}^2=b^2+c^2-2bc\cos A\ .$$

$\overline{\mathrm{B'C'}}=\overline{\mathrm{BC}}=a$ なので，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ．　（証明終り）

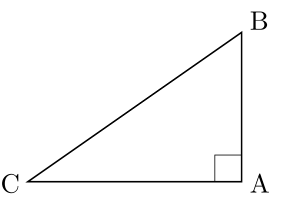
相異なる３点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，余弦定理より，

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{A}\ .$$

ここで，内角 BAC が直角であるとすると，

$\angle\mathrm{A}=90^\circ$ より $\cos\angle\mathrm{A}=\cos 90^\circ=0$ なので，

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2\ .$$



これはピタゴラスの定理（三平方の定理）です．このように，ピタゴラスの定理は余弦定理の特殊な場合です．

平面上の相異なる３点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，余弦定理より，例えば $\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\sin\angle\mathrm{A}$ ．このように，余弦定理は三角形の３辺の長さと１つの内角の大きさとの間の関係を述べます．ですから，余弦定理によって次のような計算ができます．

・三角形の２辺の長さと１つの内角の大きさとから他の辺の長さを求める．

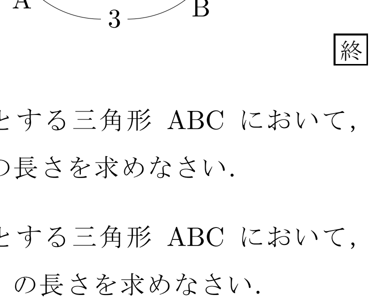
・三角形の３辺の長さから内角の大きさを求める．

例題　平面上の相異なる３点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=5$, $\angle\mathrm{B}=120^\circ$ とする．辺 AC の長さを求める．

$$\cos 120^\circ=\cos(30^\circ+90^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}\ .$$

余弦定理より

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AC}}^2&=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{B}\\&=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos 120^\circ\\&=9+25-30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=49\ .\end{aligned}$$



$\overline{\mathrm{AC}}\geq 0$ なので $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{49}=7$ ．　終

問題 6.8.1　平面上の相異なる３点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{3}$, $\angle\mathrm{A}=30^\circ$ とします．辺 BC の長さを求めなさい．

問題 6.8.2　平面上の相異なる３点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\overline{\mathrm{AC}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$, $\angle\mathrm{C}=150^\circ$ とします．辺 AB の長さを求めなさい．

例題　平面上の相異なる３点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{AC}}=7$, $\angle\mathrm{B}=60^\circ$ とする．$\overline{\mathrm{BC}}$ を求める．

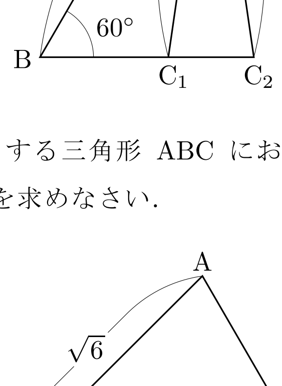
〔解説〕 余弦定理より

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{B}\ .$$

$a=\overline{\mathrm{BC}}$ とおくと，

$$49=a^2+64-2\cdot8\cdot a\cdot\cos 60^\circ\ ,$$

$a^2-8a+15=0$, $(a-3)(a-5)=0$, $a=3$ または $a=5$ ．つまり $\overline{\mathrm{BC}}=3$ または $\overline{\mathrm{BC}}=5$ ．どちらの場合もあり得る．



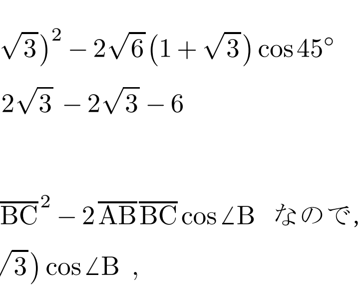
終

問題 6.8.3　平面上の相異なる３点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，$\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{13}$, $\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$ とします．$\overline{\mathrm{AC}}$ を求めなさい．

例題　平面上の相異なる３点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，

$$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{6}\ ,\qquad \overline{\mathrm{BC}}=1+\sqrt{3}\ ,\qquad \angle\mathrm{C}=45^\circ$$

とする．この三角形 ABC の内角 ∠B の大きさを求める．



余弦定理より

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}^2&=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\overline{\mathrm{AC}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{C}=\sqrt{6}^{\,2}+\left(1+\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{6}\left(1+\sqrt{3}\right)\cos 45^\circ\\&=6+1+2\sqrt{3}+3-2\sqrt{6}\left(1+\sqrt{3}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}=10+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-6\\&=4\ ,\end{aligned}$$

よって $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{4}=2$ ．余弦定理より $\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}}\cos\angle\mathrm{B}$ なので，

$$\sqrt{6}^{\,2}=2^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2-2\cdot2\left(1+\sqrt{3}\right)\cos\angle\mathrm{B}\ ,$$
$$6=4+1+2\sqrt{3}+3-4\left(1+\sqrt{3}\right)\cos\angle\mathrm{B}\ ,$$
$$4\left(1+\sqrt{3}\right)\cos\angle\mathrm{B}=2+2\sqrt{3}\ ,$$
$$\cos\angle\mathrm{B}=\frac{2+2\sqrt{3}}{4\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{2}\ ,$$

よって $\angle\mathrm{B}=60^\circ$ ．　終

問題 6.8.4　平面上の相異なる３点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，

$$\overline{\mathrm{AC}}=2\ ,\qquad \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3}-1\ ,\qquad \angle\mathrm{C}=120^\circ$$

とします．この三角形 ABC の内角 ∠B の大きさを求めなさい．

例題　平面上の相異なる３点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\ ,\qquad \overline{\mathrm{AC}}=5\ ,\qquad \overline{\mathrm{BC}}=7$$

とする．内角 BAC の大きさ ∠A の余弦 cos∠A を求め，内角 BAC の大きさ ∠A の正弦 sin∠A を求め，三角形 ABC の面積を求める．

〔解説〕 余弦定理より $\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos\angle\mathrm{A}$ なので，

$$7^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cos\angle\mathrm{A}\ ,$$
$$40\cos\angle\mathrm{A}=8\ ,$$
$$\cos\angle\mathrm{A}=\frac{1}{5}\ .$$

$(\sin\angle\mathrm{A})^2+(\cos\angle\mathrm{A})^2=1$ なので，

$$(\sin\angle\mathrm{A})^2=1-(\cos\angle\mathrm{A})^2=1-\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{24}{25}\ .$$

$0^\circ\leq\angle\mathrm{A}\leq180^\circ$ なので $\sin\angle\mathrm{A}\geq0$ ，よって

$$\sin\angle\mathrm{A}=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}\ .$$

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\sin\angle\mathrm{A}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=4\sqrt{6}\ .$$

終

問題 6.8.5　平面上の相異なる３点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\ ,\qquad \overline{\mathrm{AC}}=7\ ,\qquad \overline{\mathrm{BC}}=9$$

とします．

(1)　内角 BAC の大きさ ∠A の余弦 cos∠A を求めなさい．

(2)　内角 BAC の大きさ ∠A の正弦 sin∠A を求めなさい．

(3)　三角形 ABC の面積を求めなさい．