

§6.8 余弦定理

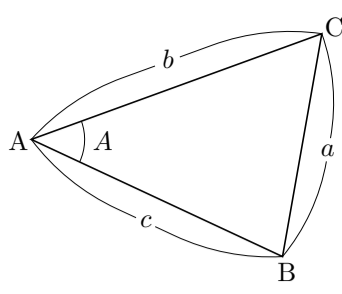
定理 (余弦定理) 平面上の相異なる3点

A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= c, & \overline{BC} &= a, \\ \overline{CA} &= b, & \angle A &= A, \end{aligned}$$

とおくと、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$



証明 xy 座標平面において点 O, B', C' を次のように定める: $O = (0, 0)$; $B' = (c, 0)$; 始線 Ox に対する線分 OC' の角度は A で、 $\overline{OC'} = b$. このとき、

$$\begin{aligned} \overline{OB'} &= c = \overline{AB}, \\ \overline{OC'} &= b = \overline{AC}, \\ \angle C'OB' &= A = \angle A. \end{aligned}$$

従って三角形 $OB'C'$ と三角形 ABC とは合同である. よって

$$a = \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

$\overline{OC'} = b$ で、始線 Ox に対する線分 OC' の角度は A なので、定理 6.4.4 より

$$C' = (b \cos A, b \sin A).$$

更に $B' = (c, 0)$ なので、定理 6.0 より、

$$\begin{aligned} \overline{B'C'}^2 &= (b \cos A - c)^2 + (b \sin A)^2 = b^2(\cos A)^2 - 2bc \cos A + c^2 + b^2(\sin A)^2 \\ &= b^2\{(\sin A)^2 + (\cos A)^2\} + c^2 - 2bc \cos A. \end{aligned}$$

定理 6.4.2 より $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$ なので、

$$b^2\{(\sin A)^2 + (\cos A)^2\} + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

よって

$$\overline{B'C'}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

$\overline{B'C'} = \overline{BC} = a$ なので、 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. (証明終り)

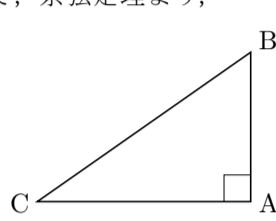
相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、余弦定理より、

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \cos \angle A.$$

ここで、内角 BAC が直角であるとすると、

$\angle A = 90^\circ$ より $\cos \angle A = \cos 90^\circ = 0$ なので、

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$



これはピタゴラスの定理 (三平方の定理) です. このように、ピタゴラスの定理は余弦定理の特殊な場合です.

平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、余弦定理より、例えば $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \sin \angle A$. このように、余弦定理は三角形の3辺の長さとして1つの内角の大きさとの間の関係を述べます. ですから、余弦定理によって次のような計算ができます.

・三角形の2辺の長さとして1つの内角の大きさから他の辺の長さを求める.

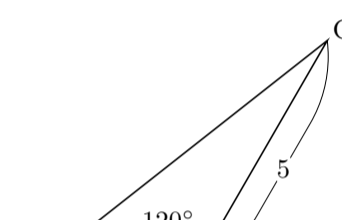
・三角形の3辺の長さから内角の大きさを求める.

例題 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 5$, $\angle B = 120^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求める.

$$\cos 120^\circ = \cos(30^\circ + 90^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

余弦定理より

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle B \\ &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ \\ &= 9 + 25 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 49. \end{aligned}$$



$\overline{AC} \geq 0$ なので $\overline{AC} = \sqrt{49} = 7$. (終)

問題 6.8.1 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = \sqrt{3}$, $\angle A = 30^\circ$ とします. 辺 BC の長さを求めなさい.

問題 6.8.2 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\overline{AC} = 5$, $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$, $\angle C = 150^\circ$ とします. 辺 AB の長さを求めなさい.

例題 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 7$, $\angle B = 60^\circ$ とする. \overline{BC} を求める.

【解説】 余弦定理より

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle B.$$

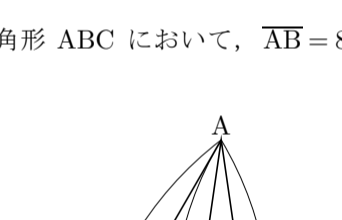
$a = \overline{BC}$ とおくと、

$$49 = a^2 + 64 - 2 \cdot 8 \cdot a \cdot \cos 60^\circ,$$

$$a^2 - 8a + 15 = 0, \quad (a-3)(a-5) = 0, \quad a = 3$$

または $a = 5$. つまり $\overline{BC} = 3$ または

$\overline{BC} = 5$. どちらの場合もあり得る. (終)



問題 6.8.3 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = \sqrt{13}$, $\angle BAC = 45^\circ$ とします. \overline{AC} を求めなさい.

例題 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、

$$\overline{AC} = \sqrt{6}, \quad \overline{BC} = 1 + \sqrt{3}, \quad \angle C = 45^\circ$$

とする. この三角形 ABC の内角 $\angle B$ の大きさを求める.

【解説】

余弦定理より

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\overline{BC} \cos \angle C = \sqrt{6}^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3}) \cos 45^\circ \\ &= 6 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 10 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 6 \\ &= 4, \end{aligned}$$

よって $\overline{AB} = \sqrt{4} = 2$. 余弦定理より $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle B$ なので、

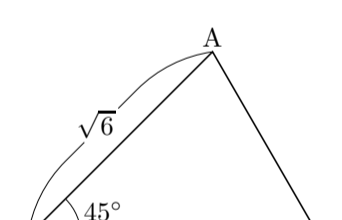
$$\sqrt{6}^2 = 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2(1 + \sqrt{3}) \cos \angle B,$$

$$6 = 4 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4(1 + \sqrt{3}) \cos \angle B,$$

$$4(1 + \sqrt{3}) \cos \angle B = 2 + 2\sqrt{3},$$

$$\cos \angle B = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4(1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{2},$$

よって $\angle B = 60^\circ$. (終)



問題 6.8.4 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、

$$\overline{AC} = 2, \quad \overline{BC} = \sqrt{3} - 1, \quad \angle C = 120^\circ$$

とします. この三角形 ABC の内角 $\angle B$ の大きさを求めなさい.

例題 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、

$$\overline{AB} = 4, \quad \overline{AC} = 5, \quad \overline{BC} = 7$$

とする. 内角 BAC の大きさ $\angle A$ の余弦 $\cos \angle A$ を求め、内角 BAC の大きさ $\angle A$ の正弦 $\sin \angle A$ を求め、三角形 ABC の面積を求める.

【解説】 余弦定理より $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \cos \angle A$ なので、

$$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos \angle A,$$

$$40 \cos \angle A = 8,$$

$$\cos \angle A = \frac{1}{5}.$$

$(\sin \angle A)^2 + (\cos \angle A)^2 = 1$ なので、

$$(\sin \angle A)^2 = 1 - (\cos \angle A)^2 = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}.$$

$0^\circ \leq \angle A \leq 180^\circ$ なので $\sin \angle A \geq 0$, よって

$$\sin \angle A = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2} \overline{AB}\overline{AC} \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6}. \quad (\text{終})$$

問題 6.8.5 平面上の相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、

$$\overline{AB} = 4, \quad \overline{AC} = 7, \quad \overline{BC} = 9$$

とします.

(1) 内角 BAC の大きさ $\angle A$ の余弦 $\cos \angle A$ を求めなさい.

(2) 内角 BAC の大きさ $\angle A$ の正弦 $\sin \angle A$ を求めなさい.

(3) 三角形 ABC の面積を求めなさい.