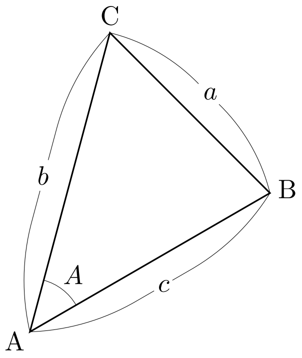
第6章の補遺2　ヘロンの公式

次に述べるヘロンの公式[3)]は，三角形の3辺の長さからその三角形の面積を求めるための公式です.

定理（ヘロンの公式）　三角形の3つの辺の長さが各々 a, b, c であるとき， $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおくと，この三角形の面積 S は

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ .$$



証明　三角形 ABC において，

$\angle \mathrm{A}=A$,　$\overline{\mathrm{BC}}=a$,　$\overline{\mathrm{CA}}=b$,　$\overline{\mathrm{AB}}=c$

とする.　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ なので,

$$(\cos A)^2=\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}\ .$$

$(\sin A)^2+(\cos A)^2=1$ なので,

$$\begin{aligned}(\sin A)^2&=1-(\cos A)^2=1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}=\frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}\\&=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}}{(2bc)^2}\\&=\frac{(b^2+2bc+c^2-a^2)\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}}{(2bc)^2}\\&=\frac{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}}{(2bc)^2}\\&=\frac{\{(b+c+a)(b+c-a)\}\{(a+b-c)(a-b+c)\}}{(2bc)^2}\\&=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(2bc)^2}\ .\end{aligned}$$

$0^\circ<A<180^\circ$ より $\sin A>0$ なので,

$$\begin{aligned}\sin A&=\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(2bc)^2}}\\&=\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{2bc}\ .\end{aligned}$$

従って，三角形 ABC の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{bc}{2}\sin A=\frac{bc}{2}\,\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{2bc}\\&=\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{4}\ .\end{aligned}$$

ここで， $a+b+c=2s$ より,

$$\begin{aligned}b+c-a&=a+b+c-2a=2s-2a=2(s-a)\ ,\\c+a-b&=a+b+c-2b=2s-2b=2(s-b)\ ,\\a+b-c&=a+b+c-2c=2s-2c=2(s-c)\ ,\end{aligned}$$

故に，三角形 ABC の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{4}\\&=\frac{\sqrt{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)}}{4}\\&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ .\end{aligned}$$

（証明終り）

---

3) ヘロン (Heron) は1世紀から2世紀頃の古代ローマ時代の数学者です.