§7.1 関数の意味

4.1 節で述べたように，変数 y が変数 x の関数であるとは，x の値を定めるとそれに応じて y の値が唯一つに定まることです． ここでは更に抽象的な関数の捉え方を述べます．

$\boxed{\text{例解}}$ 変数 x の値と変数 y の値とについて $y=x^2$ となるとき，x の値を定めると y の値が唯一つに定まるから，変数 y は変数 x の関数です． この関数 $y=x^2$ は，次のように，x の値に対して y の値が唯一つ対応します：

$x=2$ のとき $y=4$ なので，x の値 2 に対して y の値 4 を定め；
$x=3$ のとき $y=9$ なので，x の値 3 に対して y の値 9 を定め；
$x=4$ のとき $y=16$ なので，x の値 4 に対して y の値 16 を定め；
⋮

変数 x の関数 $y=x^2$ の本質は次のような対応です：

2 に対して 4 を定め，3 に対して 9 を定め，4 に対して 16 を定め，$\cdots$．

これからは，このような対応を関数と考えます． $\boxed{\text{終}}$

ある範囲の対象の各々に対して唯一つの対象を定める対応を関数といい，元の数の範囲を**定義域** (domain) といいます． 関数はより一般的に次のように定義されます．

定義 集合 S を定義域とする関数とは，集合 S の要素の各々に対して唯一つの対象を定める対応のことである．

数学では関数も一つの対象として扱います． 関数をよく f とか g とか φ とか ψ とかの文字で表します． 関数 f は定義域の各要素 a に対する対象を唯一つ定めます；a に対して f が定める対象を a に対する f の値といい，$f(a)$ と書き表します． 関数 f の定義域の各要素 x に対する f の値 $f(x)$ を定めることは，f を x に対する対象が $f(x)$ である対応と定めることです．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^2$ と定めることは，各実数 x に対する f の値 $f(x)$ を x^2 と定めることですから，f を x に対する対象が x^2 である対応と定めることです． この関数 f について，例えば，

3 に対する値は $f(3)=3^2=9$ で，
-5 に対する値は $f(-5)=(-5)^2=25$ で，
$\frac{7}{4}$ に対する値は $f\left(\frac{7}{4}\right)=\left(\frac{7}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$ です． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 集合 $\{-2,0,2\}$ を定義域とする関数 f と g とを次のように定めます：

定義域 $\{-2,0,2\}$ の各要素 x に対して， $f(x)=4x$ ， $g(x)=x^3$ ．

関数 f は，

-2 に対して $4\cdot(-2)=-8$ を，0 に対して $4\cdot 0=0$ を，2 に対して $4\cdot 2=8$ を，

定めます． 関数 g は，

-2 に対して $(-2)^3=-8$ を，0 に対して $0^3=0$ を，2 に対して $2^3=8$ を，

定めます． このように f と g とは同じ対応です． ですから，f と g とは，値を表す式は異なりますが，同じ関数です：$f=g$． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 関数 f の定義域は実数全体であり，各実数 x に対して $f(x)=x^2-4x-5$ と定めます． f は，各実数 x に対して x^2-4x-5 を対応させる関数です． 6 に対する f の値は

$$f(6)=6^2-4\cdot 6-5=36-24-5=7\ .$$

実数 a について $a+3$ に対する f の値は

$$\begin{aligned} f(a+3)&=(a+3)^2-4(a+3)-5=a^2+6a+9-4a-12-5\\ &=a^2+2a-8\ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.1.1}}$ 関数 f の定義域を実数全体として，各実数 x に対して $f(x)=x^3-4x^2$ と定めます． a は実数とします． 以下の値を計算しなさい．

(1) $f(-2)$ ． (2) $f\left(2-\sqrt{5}\right)$ ． (3) $f(a-2)$ ．

$\boxed{\text{問題 7.1.2}}$ 関数 g の定義域を実数全体として，各実数 x に対する g の値を x 以下の最大の整数と定めます． 以下の値を計算しなさい．

(1) $g\left(-\frac{19}{3}\right)$ ． (2) $g\left(3\sqrt{6}\right)$ ．

関数 f の定義域の要素を表す変数を f の**独立変数**といいます． “関数 $f(x)$ ” とは関数 f の独立変数を x とすることを意味します． 具体的な関数として，例えば “関数 x^3 ” とは，実数 x に対して x^3 を定める関数のこと，つまり，実数 x について $f(x)=x^3$ となる関数 f のことです． また，独立変数 x の値に対する f 関数の値 $f(x)$ を表す変数を f の**従属変数**といいます． つまり独立変数 x に対する f の従属変数は $y=f(x)$ となる変数 y のことです (4.1節参照)． 独立変数 x に対する関数 f の従属変数を y とおくとき，“関数 $y=f(x)$ ” といいます． 例えば，“関数 $y=3x-2$ ” とは，独立変数 x に対して従属変数 y が $y=3x-2$ となる関数を意味します．

特殊な関数として，関数の値が常に同じである関数を定数関数 (constant function) といいます． つまり，関数 f が定数関数であるとは，f の定義域の任意の要素 u と v とについて $f(u)=f(v)$ となることです．

関数 f の値 $f(x)$ が変数 x の 1 次式で表されるとき，f を 1 次関数といいます． 関数 f の値 $f(x)$ が変数 x の 2 次式で表されるとき，f を 2 次関数といいます． 一般に，自然数 n に対して，関数 f の値 $f(x)$ が変数 x の n 次式で表されるとき，f を n 次関数といいます． 関数 f の値 $f(x)$ が変数 x の整式で表されるとき，f を**有理整関数**といいます (4.2節参照)． つまり，定数関数，1 次関数，2 次関数，$\cdots$ などを併せて有理整関数といいます． 更に，関数 f の値 $f(x)$ が変数 x の有理式で表されるとき，f を**有理関数**といいます (4.9節参照)．

関数 f の**グラフ**とは，x が定義域の要素で $f(x)=y$ である実数 x と y との順序対 (x,y) 全体

$$\{\,(x,y)\mid x\ \text{は定義域の要素で}\ \ f(x)=y\ \}$$

のことです．

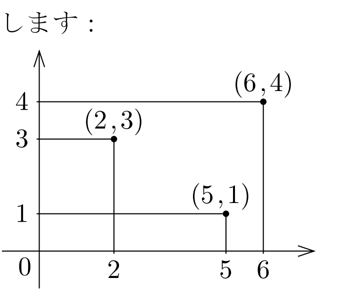
$\boxed{\text{例}}$ 集合 $\{2,5,6\}$ を定義域とする関数 f について，2 に対する値は 3 であり，5 に対する値は 1 であり，6 に対する値は 4 であるとします：

$$f(2)=3\ ,\quad f(5)=1\ ,\quad f(6)=4\ .$$

f のグラフは次の集合です．

$$\{(2,3),(5,1),(6,4)\}$$

f のグラフを座標平面で図示すると右図のようになります．



$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.1.3}}$ 集合 $\{3,4,7\}$ を定義域とする関数 f について，3 に対する値は 5 であり，4 に対する値は 2 であり，7 に対する値は 6 であるとします：

$$f(3)=5\ ,\quad f(4)=2\ ,\quad f(7)=6\ .$$

f のグラフを求めなさい．

$\boxed{\text{例解}}$ 区間 $[1,7]$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{11}{2}$ と定めます． f のグラフは，$1\le x\le 7$ かつ $y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{11}{2}$ となる順序対 (x,y) の全体

$$\left\{\,(x,y)\mid 1\le x\le 7\ \text{かつ}\ y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{11}{2}\,\right\}$$

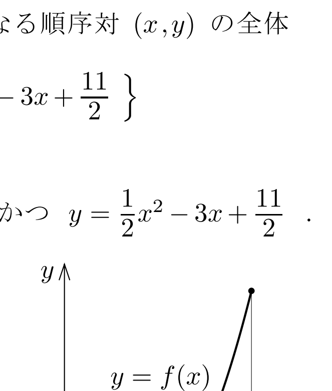
です． よって，任意の実数 x,y について，

$$(x,y)\ \text{が}\ f\ \text{のグラフに属す}\iff 1\le x\le 7\ \text{かつ}\ y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{11}{2}\ .$$

f のグラフを描くために $f(x)$ を表す 2 次式を平方完成します：

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{11}{2}=\frac{1}{2}(x-3)^2+1\ .$$

関数 f の定義域は区間 $[1,7]$ ですから，xy 座標平面において，f のグラフは x 座標が $1\le x\le 7$ の範囲に制限された $y=\frac{1}{2}(x-3)^2+1$ のグラフです．



$\boxed{\text{終}}$

関数 f および任意の実数 x と y について，

$$\text{順序対}\ (x,y)\ \text{が}\ f\ \text{のグラフに属す}\iff x\ \text{は定義域の要素で}\ f(x)=y\ .$$

$\boxed{\text{例題}}$ 実数全体を定義域とする関数 x^2 のグラフを G とおく． 次のような実数 a を求める：$(2a-3,4a)\in G$．

$G=\{\,(x,y)\mid x^2=y\,\}$ なので，

$$\begin{aligned} (2a-3,4a)\in G &\iff (2a-3,4a)\in\{\,(x,y)\mid x^2=y\,\}\\ &\iff (2a-3)^2=4a\iff a^2-4a+\frac{9}{4}=0\\ &\iff a=2\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.1.4}}$ 実数全体を定義域とする関数 x^3 のグラフを G とおきます． 次のような実数 a を求めなさい：$(a-2,7a-20)\in G$．