

### § 7.3 関数の単調増加・単調減少

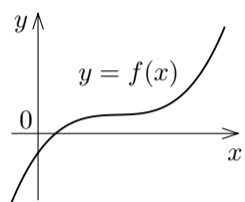
関数  $f$  について、変数  $x$  の値を大きくすると常に  $f(x)$  の値も大きくなるとき、 $f$  は**単調増加** (monotone increasing) であるといいます。また、変数  $x$  の値を大きくすると常に  $f(x)$  の値が小さくなるとき、 $f$  は**単調減少** (monotone decreasing) であるといいます。正確な定義は次のようになります。

**定義** 関数  $f$  が単調増加であるとは、

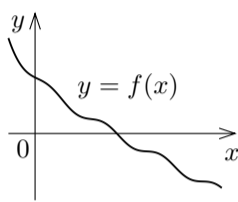
$f$  の定義域の任意の要素  $u$  と  $v$  について  $u < v$  ならば  $f(u) < f(v)$  となることであり、関数  $f$  が単調減少であるとは、

$f$  の定義域の任意の要素  $u$  と  $v$  について  $u < v$  ならば  $f(u) > f(v)$  となることである。

関数  $f$  の独立変数を  $x$  とおき従属変数を  $y$  とおきます。  $xy$  座標平面における関数  $y = f(x)$  のグラフを考えます。関数  $f$  が単調増加であるとき、 $x$  の値を大きくすると  $y = f(x)$  の値も大きくなりますから、 $y = f(x)$  のグラフは右上がりになります。関数  $f$  が単調減少であるとき、 $x$  の値を大きくすると  $y = f(x)$  の値は小さくなりますから、 $y = f(x)$  のグラフは右下がりになります。



単調増加である関数  $f$  のグラフの例



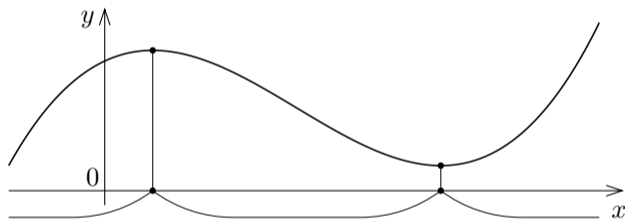
単調減少である関数  $f$  のグラフの例

**例題** 実数全体を定義域とする関数  $3x - 2$  を  $f$  とおく：  $f(x) = 3x - 2$  . 関数  $f$  は単調増加であることを示す。

任意の実数  $u, v$  について、 $u < v$  ならば、 $3u < 3v$  なので  $3u - 2 < 3v - 2$  つまり  $f(u) < f(v)$  . 従って関数  $f$  は単調増加である。 終

**問題 7.3** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = -2x + 5$  と定めます。関数  $f$  は単調減少であることを示しなさい。

関数の定義域の一部分における単調増加・単調減少を考えることもあります。関数のグラフでいうと例えば次のようになります。



この区間で単調増加    この区間で単調減少    この区間で単調増加

**定義** 関数  $f$  の定義域は集合  $S$  を含むとする。  $f$  が  $S$  において単調増加であるとは、

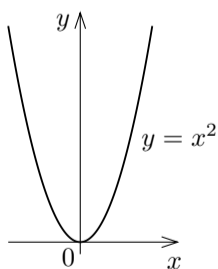
$S$  の任意の要素  $u$  と  $v$  について  $u < v$  ならば  $f(u) < f(v)$

となることであり、 $f$  が  $S$  において単調減少であるとは、

$S$  の任意の要素  $u$  と  $v$  について  $u < v$  ならば  $f(u) > f(v)$

となることである。

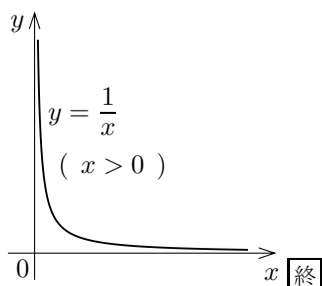
**例** 実数全体を定義域とする2次関数  $x^2$  を  $f$  とおきます：  $f(x) = x^2$  . この関数  $f$  は、区間  $(-\infty, 0]$  において単調減少で、区間  $[0, \infty)$  において単調増加です。このことを示します。



区間  $[0, \infty)$  の任意の実数  $u$  と  $v$  について、 $u < v$  ならば、 $0 \leq u < v$  なので、定理 5.1.7 より  $u^2 < v^2$  つまり  $f(u) < f(v)$  . 故に関数  $f$  は  $[0, \infty)$  において単調増加です。

区間  $(-\infty, 0]$  の任意の実数  $u$  と  $v$  とをとりまます。  $v \leq 0$  なので  $-v \geq 0$  .  $u < v$  ならば、 $-u > -v$  なので  $-u > -v \geq 0$  , 定理 5.1.7 より  $(-u)^2 > (-v)^2$  , よって  $u^2 > v^2$  つまり  $f(u) > f(v)$  . 故に関数  $f$  は  $(-\infty, 0]$  において単調減少です。 終

**例** 区間  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $\frac{1}{x}$  を  $f$  とおきます：  $f(x) = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) . この関数  $f$  は単調減少です。このことを示します。定義域  $(0, \infty)$  の任意の実数  $u$  と  $v$  について、 $u < v$  ならば、 $0 < u < v$  なので、定理 5.1.9 より  $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$  つまり  $f(u) > f(v)$  . 故に関数  $f$  は単調減少です。



終