§7.3　関数の単調増加・単調減少

関数 f について，変数 x の値を大きくすると常に $f(x)$ の値も大きくなるとき，f は**単調増加** (monotone increasing) であるといいます．また，変数 x の値を大きくすると常に $f(x)$ の値が小さくなるとき，f は**単調減少** (monotone decreasing) であるといいます．正確な定義は次のようになります．

定義　関数 f が単調増加であるとは，

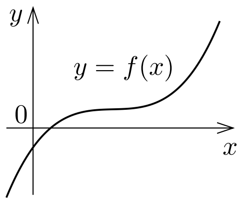
f の定義域の任意の要素 u と v とについて　$u<v$ ならば $f(u)<f(v)$

となることであり，関数 f が単調減少であるとは，

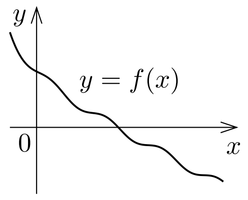
f の定義域の任意の要素 u と v とについて　$u<v$ ならば $f(u)>f(v)$

となることである．

関数 f の独立変数を x とおき従属変数を y とおきます．xy 座標平面における関数 $y=f(x)$ のグラフを考えます．関数 f が単調増加であるとき，x の値を大きくすると $y=f(x)$ の値も大きくなりますから，$y=f(x)$ のグラフは右上がりになります．関数 f が単調減少であるとき，x の値を大きくすると $y=f(x)$ の値は小さくなりますから，$y=f(x)$ のグラフは右下がりになります．



単調増加である関数 f のグラフの例



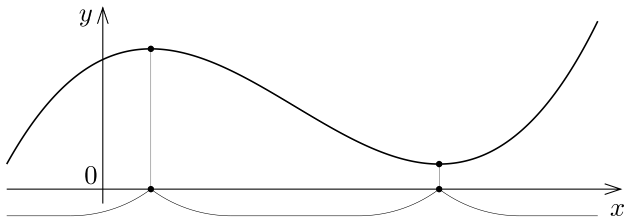
単調減少である関数 f のグラフの例

$\boxed{\text{例題}}$　実数全体を定義域とする関数 $3x-2$ を f とおく：$f(x)=3x-2$．関数 f は単調増加であることを示す．

任意の実数 u,v について，$u<v$ ならば，$3u<3v$ なので $3u-2<3v-2$ つまり $f(u)<f(v)$．従って関数 f は単調増加である．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.3}}$　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=-2x+5$ と定めます．関数 f は単調減少であることを示しなさい．

関数の定義域の一部分における単調増加・単調減少を考えることもあります．関数のグラフでいうと例えば次のようになります．



この区間で単調増加　この区間で単調減少　この区間で単調増加

定義　関数 f の定義域は集合 S を含むとする．f が S において単調増加であるとは，

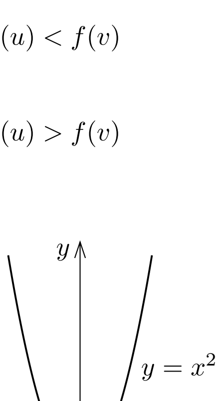
S の任意の要素 u と v とについて　$u<v$ ならば $f(u)<f(v)$

となることであり，f が S において単調減少であるとは，

S の任意の要素 u と v とについて　$u<v$ ならば $f(u)>f(v)$

となることである．

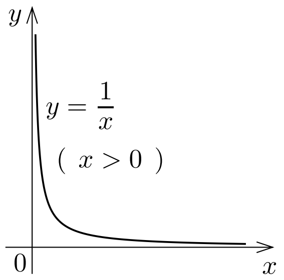
$\boxed{\text{例}}$　実数全体を定義域とする2次関数 x^2 を f とおきます：$f(x)=x^2$．この関数 f は，区間 $(-\infty,0]$ において単調減少で，区間 $[0,\infty)$ において単調増加です．このことを証明します．



区間 $[0,\infty)$ の任意の実数 u と v とについて，$u<v$ ならば，$0\leq u<v$ なので，定理5.1.7より $u^2<v^2$ つまり $f(u)<f(v)$．故に関数 f は $[0,\infty)$ において単調増加です．

区間 $(-\infty,0]$ の任意の実数 u と v とをとります．$v\leq 0$ なので $-v\geq 0$．$u<v$ ならば，$-u>-v$ なので $-u>-v\geq 0$，定理5.1.7より $(-u)^2>(-v)^2$，よって $u^2>v^2$ つまり $f(u)>f(v)$．故に関数 f は $(-\infty,0]$ において単調減少です．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$　区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 $\dfrac{1}{x}$ を f とおきます：$f(x)=\dfrac{1}{x}$（$x>0$）．この関数 f は単調減少です．このことを証明します．定義域 $(0,\infty)$ の任意の実数 u と v とについて，$u<v$ ならば，$0<u<v$ なので，定理5.1.9より $\dfrac{1}{u}>\dfrac{1}{v}$ つまり $f(u)>f(v)$．故に関数 f は単調減少です．



$\boxed{\text{終}}$