

§ 7.3 関数の単調増加・単調減少

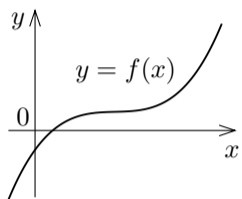
関数 f について、変数 x の値を大きくすると常に $f(x)$ の値も大きくなるとき、 f は**単調増加** (monotone increasing) であるといいます。また、変数 x の値を大きくすると常に $f(x)$ の値が小さくなるとき、 f は**単調減少** (monotone decreasing) であるといいます。正確な定義は次のようになります。

定義 関数 f が単調増加であるとは、

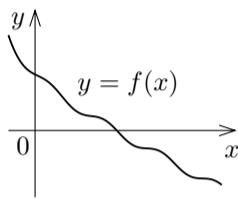
f の定義域の任意の要素 u と v について $u < v$ ならば $f(u) < f(v)$ となることであり、関数 f が単調減少であるとは、

f の定義域の任意の要素 u と v について $u < v$ ならば $f(u) > f(v)$ となることである。

関数 f の独立変数を x とおき従属変数を y とおきます。 xy 座標平面における関数 $y = f(x)$ のグラフを考えます。関数 f が単調増加であるとき、 x の値を大きくすると $y = f(x)$ の値も大きくなりますから、 $y = f(x)$ のグラフは右上がりになります。関数 f が単調減少であるとき、 x の値を大きくすると $y = f(x)$ の値は小さくなりますから、 $y = f(x)$ のグラフは右下がりになります。



単調増加である関数 f のグラフの例



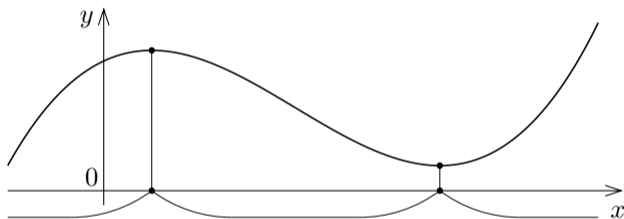
単調減少である関数 f のグラフの例

例題 実数全体を定義域とする関数 $3x - 2$ を f とおく： $f(x) = 3x - 2$ 。関数 f は単調増加であることを示す。

任意の実数 u, v について、 $u < v$ ならば、 $3u < 3v$ なので $3u - 2 < 3v - 2$ つまり $f(u) < f(v)$ 。従って関数 f は単調増加である。 終

問題 7.3 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = -2x + 5$ と定めます。関数 f は単調減少であることを示しなさい。

関数の定義域の一部における単調増加・単調減少を考えることもあります。関数のグラフでいうと例えば次のようになります。



この区間で単調増加 この区間で単調減少 この区間で単調増加

定義 関数 f の定義域は集合 S を含むとする。 f が S において単調増加であるとは、

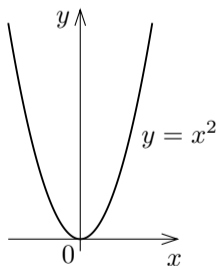
S の任意の要素 u と v について $u < v$ ならば $f(u) < f(v)$

となることであり、 f が S において単調減少であるとは、

S の任意の要素 u と v について $u < v$ ならば $f(u) > f(v)$

となることである。

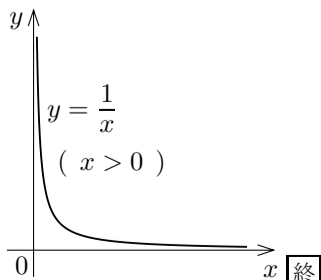
例 実数全体を定義域とする2次関数 x^2 を f とおきます： $f(x) = x^2$ 。この関数 f は、区間 $(-\infty, 0]$ において単調減少で、区間 $[0, \infty)$ において単調増加です。このことを証明します。



区間 $[0, \infty)$ の任意の実数 u と v について、 $u < v$ ならば、 $0 \leq u < v$ なので、定理 5.1.7 より $u^2 < v^2$ つまり $f(u) < f(v)$ 。故に関数 f は $[0, \infty)$ において単調増加です。

区間 $(-\infty, 0]$ の任意の実数 u と v とをとりまます。 $v \leq 0$ なので $-v \geq 0$ 。 $u < v$ ならば、 $-u > -v$ なので $-u > -v \geq 0$ 、定理 5.1.7 より $(-u)^2 > (-v)^2$ 、よって $u^2 > v^2$ つまり $f(u) > f(v)$ 。故に関数 f は $(-\infty, 0]$ において単調減少です。 終

例 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 $\frac{1}{x}$ を f とおきます： $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$)。この関数 f は単調減少です。このことを証明します。定義域 $(0, \infty)$ の任意の実数 u と v について、 $u < v$ ならば、 $0 < u < v$ なので、定理 5.1.9 より $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$ つまり $f(u) > f(v)$ 。故に関数 f は単調減少です。



終