§7.4　関数の最大値と最小値

関数の f の**最大値** (maximum value) とは f の値域のなかで最も大きい実数のことで，関数 f の**最小値** (minimum value) とは f の値域のなかで最も小さい実数のことです．正確に述べると次のようになります．

定義　関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

f の定義域の任意の要素 x に対して $f(p) \geq f(x)$ ；

このとき f の値 $f(p)$ を f の最大値という．また，f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

f の定義域の任意の要素 x に対して $f(p) \leq f(x)$ ；

このとき f の値 $f(p)$ を f の最小値という．

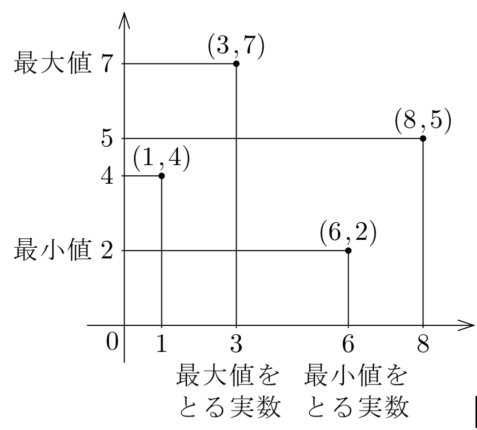
$\boxed{\text{例}}$　集合 $\{1,3,6,8\}$ を定義域とする関数 f を次のように定めます：

$$f(1)=4\ ,\quad f(3)=7\ ,\quad f(6)=2\ ,\quad f(8)=5\ .$$

この関数のグラフは次の集合です：

$$\{(1,4),(3,7),(6,2),(8,5)\}\ .$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになります．この関数の値域は集合 $\{2,4,5,7\}$ です．f の最大値は値域の要素で最大の実数 7 で，f の最小値は値域の要素で最小の実数 2 です．f は，3 において最大値 7 をとり，6 において最小値 2 をとります．



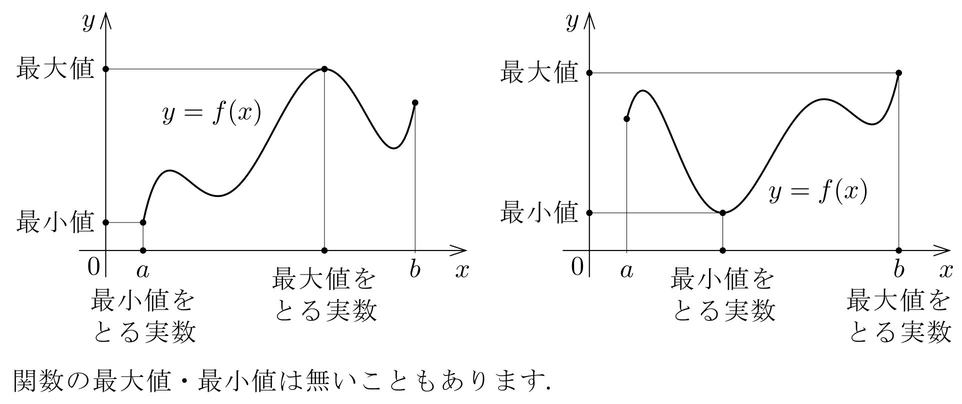
終

$\boxed{\text{問題 7.4.1}}$　集合 $\{2,5,7,9\}$ を定義域とする関数 f を次のように定めます：

$$f(2)=4\ ,\quad f(5)=8\ ,\quad f(7)=3\ ,\quad f(9)=6\ .$$

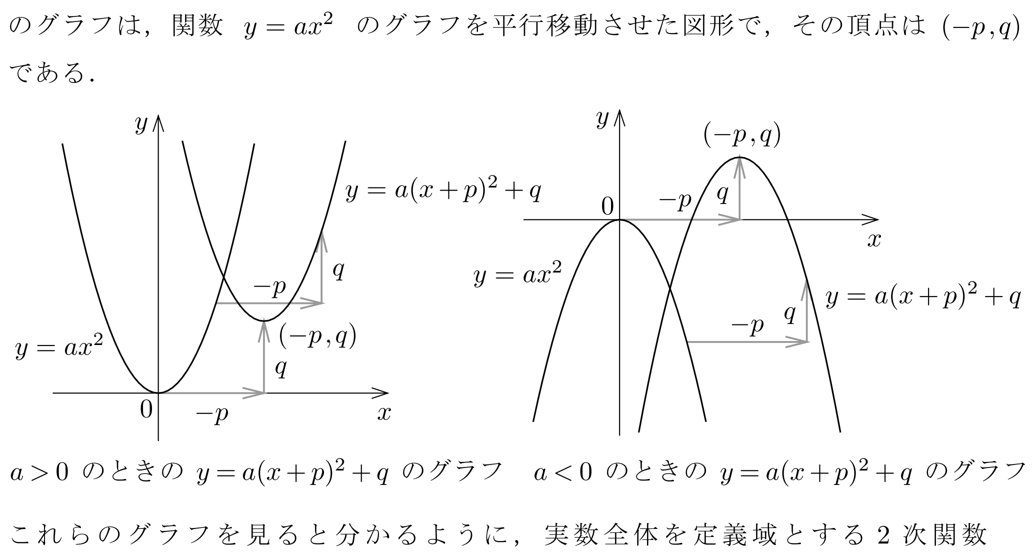
関数 f の最大値・最小値を求めなさい．どの実数において最大値・最小値をとるかも記しなさい．

実数 a と b とについて $a<b$ とします．区間 $[a,b]$ を定義域とする関数 f のグラフにおいて，最大値・最小値は例えば次の図のようになります．



関数の最大値・最小値は無いこともあります．

2 次関数について最大値・最小値を考えます．実数全体を定義域とする 2 次関数 f を平方完成された式で表します：$f(x)=a(x+p)^2+q$ （a,p,q は定数で $a \neq 0$）．4.7節において次のことを述べました：xy 座標平面において，関数 $y=a(x+p)^2+q$ のグラフは，関数 $y=ax^2$ のグラフを平行移動させた図形で，その頂点は $(-p,q)$ である．



$a>0$ のときの $y=a(x+p)^2+q$ のグラフ　$a<0$ のときの $y=a(x+p)^2+q$ のグラフ

これらのグラフを見ると分かるように，実数全体を定義域とする 2 次関数 $f(x)=a(x+p)^2+q$ について次のことが成り立ちます：

(1)　$a>0$ のとき，区間 $(-\infty,-p]$ において単調減少で区間 $[-p,\infty)$ において単調増加なので，実数 $-p$ において最小値 q をとり，最大値はない；

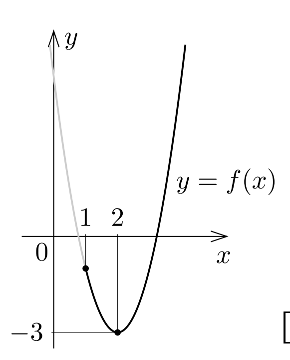
(2)　$a<0$ のとき，区間 $(-\infty,-p]$ において単調増加で区間 $[-p,\infty)$ において単調減少なので，実数 $-p$ において最大値 q をとり，最小値はない．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $[1,\infty)$ を定義域とする 2 次関数 f を $f(x)=2x^2-8x+5$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

［解説］ $f(x)$ を表す式を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x)=2x^2-8x+5&=2(x^2-4x)+5\\ &=2(x^2-4x+4)-8+5\\ &=2(x-2)^2-3\ . \end{aligned}$$

これより，f は，区間 $[1,2]$ で単調減少であり，区間 $[2,\infty)$ で単調増加である．従って関数 f は 2 において最小値 $f(2)=-3$ をとる．f の最大値はない．



終

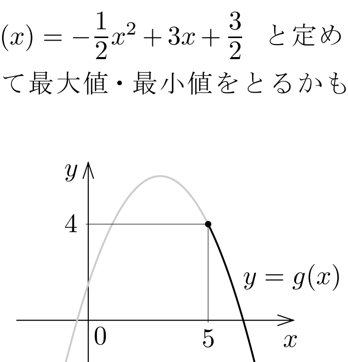
$\boxed{\text{問題 7.4.2}}$　区間 $[-1,\infty)$ を定義域とする 2 次関数 f を $f(x)=3x^2-6x-5$ と定めます．関数 f の最大値・最小値を調べなさい（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べなさい）．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $[5,\infty)$ を定義域とする 2 次関数 g を $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

［解説］ $g(x)$ を表す式を平方完成すると

$$\begin{aligned} g(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}&=-\frac{1}{2}(x^2-6x)+\frac{3}{2}\\ &=-\frac{1}{2}(x^2-6x+9)+\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\\ &=-\frac{1}{2}(x-3)^2+6\ . \end{aligned}$$

これより，g は区間 $[5,\infty)$ で単調減少である．従って，関数 g は 5 において最大値 $g(5)=4$ をとる．g の最小値はない．



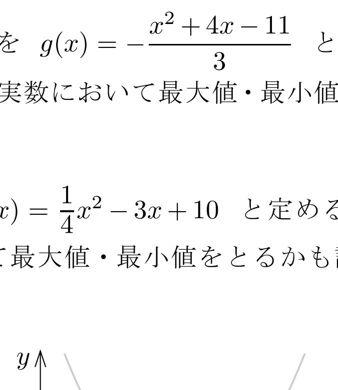
終

$\boxed{\text{問題 7.4.3}}$　区間 $[1,\infty)$ を定義域とする 2 次関数 g を $g(x)=-\dfrac{x^2+4x-11}{3}$ と定めます．関数 g の最大値・最小値を調べなさい（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べなさい）．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $[2,8]$ を定義域とする 2 次関数 φ を $\varphi(x)=\frac{1}{4}x^2-3x+10$ と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

［解説］ $\varphi(x)$ を表す式を平方完成すると

$$\begin{aligned} \varphi(x)=\frac{1}{4}x^2-3x+10&=\frac{1}{4}(x^2-12x)+10\\ &=\frac{1}{4}(x^2-12x+36)-9+10\\ &=\frac{1}{4}(x-6)^2+1\ . \end{aligned}$$



これより，φ は，区間 $[2,6]$ で単調減少であり，区間 $[6,8]$ で単調増加である．従って，関数 φ は 6 において最小値 $\varphi(6)=1$ をとる．$\varphi(2)=5$，$\varphi(8)=2$ なので，φ は 2 において最大値 5 をとる．

終

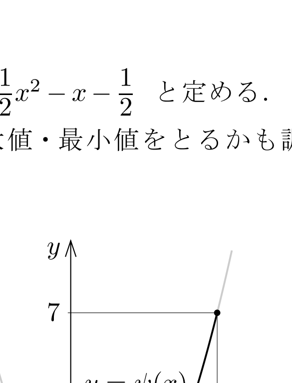
$\boxed{\text{問題 7.4.4}}$　区間 $[-1,2]$ を定義域とする 2 次関数 φ を $\varphi(x)=3x^2-4x-1$ と定めます．関数 φ の最大値・最小値を調べなさい（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べなさい）．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $[3,5]$ を定義域とする 2 次関数 ψ を $\psi(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$ と定める．関数 ψ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

［解説］ $\psi(x)$ を表す式を平方完成すると

$$\begin{aligned} \psi(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}&=\frac{1}{2}(x-2x)-\frac{1}{2}\\ &=\frac{1}{2}(x-2x+1)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\ &=\frac{1}{2}(x-1)^2-1\ . \end{aligned}$$

これより，ψ は区間 $[3,5]$ で単調増加である．従って，関数 ψ は，3 において最小値 $\psi(3)=1$ をとり，5 において最大値 $\psi(5)=7$ をとる．



終

$\boxed{\text{問題 7.4.5}}$　区間 $[-1,2]$ を定義域とする 2 次関数 ψ を $\psi(x)=-2x^2+10x-5$ と定めます．関数 ψ の最大値・最小値を調べなさい（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べなさい）．