§7.5　関数の合成

$\boxed{\text{例解}}$　集合 $\{1,2,3\}$ を定義域とする関数 f を次のように定めます：

$$f(1)=5\ ,\quad f(2)=9\ ,\quad f(3)=7\ .$$

集合 $\{5,6,7,8,9\}$ を定義域とする関数 g を次のように定めます：

$$g(5)=3\ ,\quad g(6)=1\ ,\quad g(7)=4\ ,\quad g(8)=2\ ,\quad g(9)=0\ .$$

このとき，次のように，f の定義域 $\{1,2,3\}$ の各要素 x に対して $g\bigl(f(x)\bigr)$ の値が唯一つ定まります：

$$\begin{aligned}
&f(1)=5 \text{ かつ } g(5)=3 \text{ なので } g\bigl(f(1)\bigr)=g(5)=3\ ,\\
&f(2)=9 \text{ かつ } g(9)=0 \text{ なので } g\bigl(f(2)\bigr)=g(9)=0\ ,\\
&f(3)=7 \text{ かつ } g(7)=4 \text{ なので } g\bigl(f(3)\bigr)=g(7)=4\ .
\end{aligned}$$

この関数を f と g との合成関数といいます.　$\boxed{\text{終}}$

一般的に，関数 f の定義域の各要素 x に対する f の値 $f(x)$ が関数 g の定義域に属すとき，$f(x)$ に対する g の値 $g\bigl(f(x)\bigr)$ がありますから，f の定義域の各要素 x に対して $g\bigl(f(x)\bigr)$ を定める対応は関数になります；この関数を f と g との**合成関数** (composite function) といいます.

定義　関数 f の値域が関数 g の定義域に含まれるとき，f の定義域の各要素 x に $g\bigl(f(x)\bigr)$ を対応させる関数を f と g との合成関数という.

つまり，関数 $f(x)$ の値域が関数 $g(x)$ の定義域に含まれるときに限り [2)]，$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ があります；そしてこの合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ の定義域は $f(x)$ の定義域です.

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $[3,\infty)$ を定義域とする関数 $f(x)$ を $f(x)=2x-1$ と定め，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 $g(x)$ を $g(x)=x^2+4$ と定める． $f(x)$ の値域は，区間 $[5,\infty)$ なので，$g(x)$ の定義域の区間 $[0,\infty)$ に含まれる；よって $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ がある． この合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ を求める． また，$g(x)$ の値域は，区間 $[4,\infty)$ なので，$f(x)$ の定義域の区間 $[3,\infty)$ に含まれる；よって $g(x)$ と $f(x)$ との合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ がある． この合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ を求める．

〔解答〕 合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ の定義域は，関数 $f(x)$ の定義域なので，区間 $[3,\infty)$ である． この区間 $[3,\infty)$ の各実数 x について，

$$\begin{aligned}
g\bigl(f(x)\bigr)&=g(2x-1)=(2x-1)^2+4=4x^2-4x+1+4\\
&=4x^2-4x+5\ .
\end{aligned}$$

合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ の定義域は，関数 $g(x)$ の定義域なので，区間 $[0,\infty)$ である． この区間 $[0,\infty)$ の各実数 x について，

$$\begin{aligned}
f\bigl(g(x)\bigr)&=f(x^2+4)=2(x^2+4)-1=2x^2+8-1\\
&=2x^2+7\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.5}}$　区間 $[2,\infty)$ を定義域とする関数 $f(x)$ を $f(x)=3x-2$ と定め，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 $g(x)$ を $g(x)=\dfrac{1}{3}x^2+5$ と定めます.

(1) 関数 $f(x)$ の値域は，区間 $[4,\infty)$ なので，関数 $g(x)$ の定義域の区間 $[0,\infty)$ に含まれます. よって $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ ができます. この合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ を求めなさい.

(2) 関数 $g(x)$ の値域は，区間 $[5,\infty)$ なので，関数 $f(x)$ の定義域の区間 $[4,\infty)$ に含まれます. よって $g(x)$ と $f(x)$ との合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ ができます. この合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ を求めなさい.

---

2) 変数 x の値が g の定義域に属すときに限り $g(x)$ の値があります. ですから，$f(x)$ の値が g の定義域に属すときに限り $g\bigl(f(x)\bigr)$ の値があります. つまり，$g\bigl(f(x)\bigr)$ の値があるためには f の値 $f(x)$ が g の定義域に属さなければなりません. 故に，合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ を考えるには，f の値の全体つまり f の値域が g の定義域に含まれなければなりません.