

## § 7.5 関数の合成

**例解** 集合  $\{1, 2, 3\}$  を定義域とする関数  $f$  を次のように定めます：

$$f(1) = 5, \quad f(2) = 9, \quad f(3) = 7.$$

集合  $\{5, 6, 7, 8, 9\}$  を定義域とする関数  $g$  を次のように定めます：

$$g(5) = 3, \quad g(6) = 1, \quad g(7) = 4, \quad g(8) = 2, \quad g(9) = 0.$$

このとき、次のように、 $f$  の定義域  $\{1, 2, 3\}$  の各要素  $x$  に対して  $g(f(x))$  の値が唯一つ定まります：

$$g(f(1)) = g(5) = 3, \quad g(f(2)) = g(9) = 0, \quad g(f(3)) = g(7) = 4.$$

この関数を  $f$  と  $g$  との合成関数といいます。

**終**

一般的に、関数  $f$  の定義域の各要素  $x$  に対する  $f$  の値  $f(x)$  が関数  $g$  の定義域に属するとき、 $f(x)$  に対する  $g$  の値  $g(f(x))$  がありますから、 $f$  の定義域の各要素  $x$  に対して  $g(f(x))$  を定める対応は関数になります；この関数を  $f$  と  $g$  との**合成関数** (composite function) といいます。

**定義** 関数  $f$  の値域が関数  $g$  の定義域に含まれるとき、 $f$  の定義域の各要素  $x$  に  $g(f(x))$  を対応させる関数を  $f$  と  $g$  との合成関数という。

つまり、関数  $f(x)$  の値域が関数  $g(x)$  の定義域に含まれるときに限り<sup>3)</sup>、 $f(x)$  と  $g(x)$  との合成関数  $g(f(x))$  があります；そしてこの合成関数  $g(f(x))$  の定義域は  $f(x)$  の定義域です。

**例題** 実数全体を定義域とする関数  $f(x)$  を  $f(x) = 2x + 1$  と定め、実数全体を定義域とする関数  $g(x)$  を  $g(x) = x^2 + 2$  と定める。 $f(x)$  の値域は  $g(x)$  の定義域に含まれるので、 $f(x)$  と  $g(x)$  との合成関数  $g(f(x))$  がある。この合成関数  $g(f(x))$  を求める。また、 $g(x)$  の値域は  $f(x)$  の定義域に含まれるので、 $g(x)$  と  $f(x)$  との合成関数  $f(g(x))$  がある。この合成関数  $f(g(x))$  を求める。

【解答】 合成関数  $g(f(x))$  の定義域は、関数  $f(x)$  の定義域なので、実数全体である。各実数  $x$  について、

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 2 = 4x^2 + 4x + 1 + 2 \\ &= 4x^2 + 4x + 3. \end{aligned}$$

合成関数  $f(g(x))$  の定義域は、関数  $g(x)$  の定義域なので、実数全体である。各実数  $x$  について、

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x^2 + 2) = 2(x^2 + 2) + 1 = 2x^2 + 4 + 1 \\ &= 2x^2 + 5. \end{aligned}$$

**終**

**問題 7.5** 実数全体を定義域とする関数  $f(x)$  を  $f(x) = 3x + 2$  と定め、実数全体を定義域とする関数  $g(x)$  を  $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$  と定めます。

(1) 関数  $f(x)$  の値域は関数  $g(x)$  の定義域に含まれます。よって  $f(x)$  と  $g(x)$  との合成関数  $g(f(x))$  ができます。この合成関数  $g(f(x))$  を求めなさい。

(2) 関数  $g(x)$  の値域は関数  $f(x)$  の定義域に含まれます。よって  $g(x)$  と  $f(x)$  との合成関数  $f(g(x))$  ができます。この合成関数  $f(g(x))$  を求めなさい。

<sup>3)</sup> 変数  $x$  の値が  $g$  の定義域に属すときに限り  $g(x)$  の値があります。ですから、 $f(x)$  の値が  $g$  の定義域に属すときに限り  $g(f(x))$  の値があります。つまり、 $g(f(x))$  の値があるためには  $f$  の値  $f(x)$  が  $g$  の定義域に属さなければなりません。故に、関数  $g(f(x))$  を作るには、 $f$  の値の全体つまり  $f$  の値域が  $g$  の定義域に含まれなければなりません。