

§ 7.6 逆関数

関数 f は、 f の定義域の要素 x に $f(x)$ を対応させます。逆に f の値域の要素 $f(x)$ に x を対応させる関数を、 f の**逆関数** (inverse function) といいます。関数 g が関数 f の逆関数であるとき、 g は $f(x)$ に x を対応させますから、 $f(x)$ に対する g の値 $g(f(x))$ が x になります： $g(f(x)) = x$ 。正確には次のように定義します。

定義 関数 g が関数 f の逆関数であるとは次の2条件が成り立つことである：

- (1) f の値域と g の定義域とは同じである；
- (2) f の定義域の任意の要素 x について $g(f(x)) = x$ 。

例 実数全体を定義域とする関数 f と g とを、それぞれ、 $f(x) = x + 7$ 、 $g(x) = x - 7$ と定めます。 f の値域は実数全体なので g の定義域と同じであり、

$$g(f(x)) = f(x) - 7 = (x + 7) - 7 = x.$$

従って g は f の逆関数です。 終

例 実数全体を定義域とする関数 f と g とを、それぞれ、 $f(x) = 3x$ 、 $g(x) = \frac{x}{3}$ と定めます。 f の値域は実数全体なので g の定義域と同じであり、

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{3} = \frac{3x}{3} = x.$$

従って g は f の逆関数です。 終

関数 f の逆関数とは、 f の計算と逆の計算をする関数です。

例題 実数全体を定義域とする関数 f と g とを次のように定める：

$$f(x) = 2x - 3, \quad g(x) = \frac{x + 3}{2}.$$

関数 g は関数 f の逆関数であることを示す。

【解答】 関数 f の値域は実数全体なので関数 g の定義域と一致する。また、任意の実数 x について、

$$g(f(x)) = \frac{f(x) + 3}{2} = \frac{(2x - 3) + 3}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

従って、逆関数の定義より g は f の逆関数である。 終

問題 7.6.1 実数全体を定義域とする関数 f と g とを次のように定めます：

$$f(x) = -\frac{2x - 5}{3}, \quad g(x) = -\frac{3x - 5}{2}.$$

関数 g は関数 f の逆関数であることを示しなさい。

次の定理は重要です。

定理 7.6.1 関数 g が関数 f の逆関数であるとき、

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ について } g(f(x)) = x,$$

$$g \text{ の定義域の任意の要素 } y \text{ について } f(g(y)) = y.$$

証明 関数 g が関数 f の逆関数であるとする。“ f の定義域の任意の要素 x について $g(f(x)) = x$ ”であることは逆関数の定義に含まれる。“ g の定義域の任意の要素 y について $f(g(y)) = y$ ”であることを示す。

関数 g は関数 f の逆関数なので、 g の定義域は f の値域である。値域の定義より、 f の値域の要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x がある。 $y = f(x)$ より $g(y) = g(f(x))$ 、関数 g は関数 f の逆関数なので $g(f(x)) = x$ 、従って $g(y) = x$ ；これより $f(g(y)) = f(x)$ 、 $f(x) = y$ なので $f(g(y)) = y$ 。

(証明終り)

関数 f に対して変数 x と y とを $y = f(x)$ とおきます。 f は x の値に対して y の値を定めます。関数 g が関数 f の逆関数であるとき、

$$g(y) = g(f(x)) = x,$$

このように g は y の値に対して x の値を定めます。つまり、関数 f の逆関数は、 y の値に対して $f(x) = y$ となる x の値を定めます。関数は唯一つの対象を定める対応ですから、 y の値に対して $f(x) = y$ となる x の値を唯一つに定められないときは、 f の逆関数がありません。

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2$ と定めます。例えば $f(x) = 7$ とすると、 $x^2 = 7$ なので、 $x = \sqrt{7}$ または $x = -\sqrt{7}$ ；このように x の値を唯一つに定められません。よって関数 f の逆関数はありません。 終

次の定理が成り立ちます。

定理 7.6.2 関数 f の値域の各要素 y に対して $f(x) = y$ となる f の定義域の要素 x が唯一つあるとき、 f の値域の各要素 y に $f(x) = y$ となる f の定義域の要素 x を対応させる関数は f の逆関数である。

証明 関数 f の値域の各要素 y に対して $f(x) = y$ となる f の定義域の要素 x が唯一つあるとする。このとき、 f の値域の各要素 y に対して $f(x) = y$ となる f の定義域の要素 x を定める対応は関数である。この関数を g とおく： f の定義域の各要素 x と値域の各要素 y とについて、 $f(x) = y$ のとき $g(y) = x$ 。関数 g の定義域は f の値域である。更に、 f の定義域の各要素 v に対して、 $f(u) = v$ とおくと、 $g(v) = u$ なので、 $g(f(u)) = g(v) = u$ 。従って g は関数 f の逆関数である。

(証明終り)

xy 座標平面における関数 $y = f(x)$ のグラフを考えると例えば次のようになります。

証明は省略しますが、関数の逆関数はあるとしても唯一つです。

定理 7.6.3 関数 f に対して、 f の逆関数はあるとしても唯一つだけである。

関数 f の逆関数があるとき、 f の逆関数を f^{-1} と書き表します。

例 集合 $\{2, 3, 4\}$ を定義域とする関数 f を次のように定めます：

$$f(2) = 5, \quad f(3) = 7, \quad f(4) = 9.$$

この関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域 $\{5, 7, 9\}$ であり、

$$f^{-1}(5) = f^{-1}(f(2)) = 2, \quad f^{-1}(7) = f^{-1}(f(3)) = 3, \quad f^{-1}(9) = f^{-1}(f(4)) = 4.$$

終

問題 7.6.2 集合 $\{2, 3, 4, 5\}$ を定義域とする関数 f を次のように定めます：

$$f(2) = 7, \quad f(3) = 9, \quad f(4) = 6, \quad f(5) = 8.$$

$f^{-1}(6)$, $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(8)$, $f^{-1}(9)$ を求めなさい。

例解 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 4x + 5$ と定めます。この関数 f の逆関数 f^{-1} があるか調べます。 f の値域は実数全体です。各実数 y に対して $f(x) = y$ となる実数 x を求めます。 $f(x) = y$ つまり $4x + 5 = y$ より、 $4x = y - 5$ 、 $x = \frac{y - 5}{4}$ 。このように、各実数 y に対して $f(x) = y$ となる実数 x が唯一つに定まり、 $x = \frac{y - 5}{4}$ 。故に、関数 f の逆関数 f^{-1} があり、 f^{-1} の定義域は f の値域なので実数全体であり、 $f^{-1}(y) = \frac{y - 5}{4}$ 。関数の独立変数は通常 x を用いるので、 $f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{4}$ とします。 終

例題 区間 $[4, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 3x - 5$ と定める。この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる。

【解答】 f の値域は区間 $[7, \infty)$ である。この区間 $[7, \infty)$ の実数 y に対して $f(x) = y$ となる実数 x を求める。 $f(x) = y$ つまり $3x - 5 = y$ より、 $3x = y + 5$ 、 $x = \frac{y + 5}{3}$ 。このように、区間 $[7, \infty)$ の各実数 y に対して、 $f(x) = y$ となる実数 x が唯一つに定まり、 $x = \frac{y + 5}{3}$ 。故に、関数 f の逆関数 f^{-1} があり、 f^{-1} の定義域は f の値域なので区間 $[7, \infty)$ であり、 $f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{3}$ 。 終

問題 7.6.3 区間 $[-4, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x + 9$ と定めます。この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べなさい。

問題 7.6.4 区間 $[1, \infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x) = 9 - 4x$ と定めます。この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べなさい。

定理 7.6.4 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき、 f の定義域の任意の要素 x 及び f の値域の任意の要素 y について

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

証明 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする。 f の定義域の任意の要素 x 及び f の値域の任意の要素 y について、定理 7.6.1 より、

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

これらのことより、 $y = f(x)$ ならば $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ 、 $x = f^{-1}(y)$ ならば $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$ 。よって

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

(証明終り)

逆関数について更に以下の定理が成り立ちます (証明は省略します)。

定理 7.6.5 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき、 f^{-1} の定義域は f の値域であり、 f^{-1} の値域は f の定義域である。

定理 7.6.6 関数 g が関数 f の逆関数であるとき、 f は g の逆関数である。