§7.6　逆関数

関数 f は，f の定義域の要素 x に $f(x)$ を対応させます．逆に f の値域の要素 $f(x)$ に x を対応させる関数を，f の**逆関数** (inverse function) といいます．関数 g が関数 f の逆関数であるとき，g は $f(x)$ に x を対応させますから，$f(x)$ に対する g の値 $g\big(f(x)\big)$ が x になります：$g\big(f(x)\big)=x$ ．正確には次のように定義します．

定義　関数 g が関数 f の逆関数であるとは次の2条件が成り立つことである：
(1)　f の値域と g の定義域とは同じである；
(2)　f の定義域の任意の要素 x について $g\big(f(x)\big)=x$ ．

$\boxed{例}$　実数全体を定義域とする関数 f と g とを，それぞれ，$f(x)=x+7$ ，$g(x)=x-7$ と定めます．f の値域は実数全体なので g の定義域と同じであり，

$$g\big(f(x)\big)=f(x)-7=(x+7)-7=x\ .$$

従って g は f の逆関数です．　$\boxed{終}$

$\boxed{例}$　実数全体を定義域とする関数 f と g とを，それぞれ，$f(x)=3x$ ，$g(x)=\dfrac{x}{3}$ と定めます．f の値域は実数全体なので g の定義域と同じであり，

$$g\big(f(x)\big)=\frac{f(x)}{3}=\frac{3x}{3}=x\ .$$

従って g は f の逆関数です．　$\boxed{終}$

関数 f の逆関数とは，f の計算と逆の計算をする関数です．

$\boxed{例題}$　実数全体を定義域とする関数 f と g とを次のように定める：

$$f(x)=2x-3\ ,\qquad g(x)=\frac{x+3}{2}\ .$$

関数 g は関数 f の逆関数であることを示す．
〔解答〕関数 f の値域は実数全体なので関数 g の定義域と一致する．また，任意の実数 x について，

$$g\big(f(x)\big)=\frac{f(x)+3}{2}=\frac{(2x-3)+3}{2}=\frac{2x}{2}=x\ .$$

従って，逆関数の定義より g は f の逆関数である．　$\boxed{終}$

$\boxed{問題\ 7.6.1}$　実数全体を定義域とする関数 f と g とを次のように定めます：

$$f(x)=-\frac{2x-5}{3}\ ,\qquad g(x)=-\frac{3x-5}{2}\ .$$

関数 g は関数 f の逆関数であることを示しなさい．

次の定理は重要です．

> **定理 7.6.1**　関数 g が関数 f の逆関数であるとき，
> f の定義域の任意の要素 x について　$g\big(f(x)\big)=x$ ，
> g の定義域の任意の要素 y について　$f\big(g(y)\big)=y$ ．

証明　関数 g が関数 f の逆関数であるとする．“f の定義域の任意の要素 x について $g\big(f(x)\big)=x$”であることは逆関数の定義に含まれる．“g の定義域の任意の要素 y について $f\big(g(y)\big)=y$”であることを示す．
関数 g は関数 f の逆関数なので，g の定義域は f の値域である．値域の定義より，f の値域の要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x がある．$y=f(x)$ より $g(y)=g\big(f(x)\big)$ ，関数 g は関数 f の逆関数なので $g\big(f(x)\big)=x$ ，従って $g(y)=x$ ；これより $f\big(g(y)\big)=f(x)$ ，$f(x)=y$ なので $f\big(g(y)\big)=y$ ．
（証明終り）

関数 f に対して変数 x と y とを $y=f(x)$ とおきます．f は x の値に対して y の値を定めます．関数 g が関数 f の逆関数であるとき，

$$g(y)=g\big(f(x)\big)=x\ ,$$

このように g は y の値に対して x の値を定めます．つまり，関数 f の逆関数は，y の値に対して $f(x)=y$ となる x の値を定めます．関数は唯一つの対象を定める対応ですから，y の値に対して $f(x)=y$ となる x の値を唯一つに定められないときは，f の逆関数がありません．

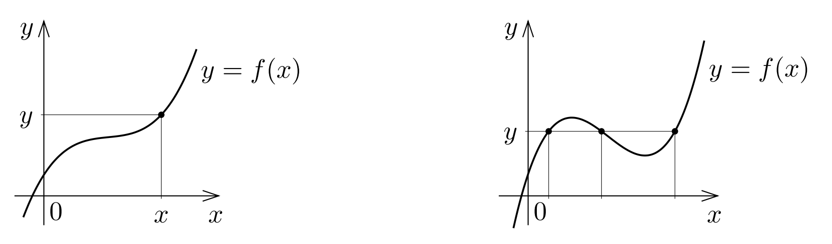
$\boxed{例}$　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^2$ と定めます．例えば $f(x)=7$ とすると，$x^2=7$ なので，$x=\sqrt{7}$ または $x=-\sqrt{7}$ ；このように x の値を唯一つに定められません．よって関数 f の逆関数はありません．　$\boxed{終}$

次の定理が成り立ちます．

> **定理 7.6.2**　関数 f の値域の各要素 y に対して $f(x)=y$ となる f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，f の値域の各要素 y に $f(x)=y$ となる f の定義域の要素 x を対応させる関数は f の逆関数である．

証明　関数 f の値域の各要素 y に対して $f(x)=y$ となる f の定義域の要素 x が唯一つあるとする．このとき，f の値域の各要素 y に対して $f(x)=y$ となる f の定義域の要素 x を定める対応は関数である．この関数を g とおく：f の定義域の各要素 x と値域の各要素 y とについて，$f(x)=y$ のとき $g(y)=x$ ．関数 g の定義域は f の値域である．更に，f の定義域の各要素 v に対して，$f(u)=v$ とおくと，$g(v)=u$ なので，$g\big(f(u)\big)=g(v)=u$ ．従って g は関数 f の逆関数である．
（証明終り）

xy 座標平面における関数 $y=f(x)$ のグラフを考えると例えば次のようになります．



$f(x)=y$ となる x の値が唯一つだけあるので，関数 f の逆関数がある．　　関数 f の逆関数はない．$f(x)=y$ となる x の値が2つ以上ある．

証明は省略しますが，関数の逆関数はあるとしても唯一つです．

定理 7.6.3　関数 f に対して，f の逆関数はあるとしても唯一つだけである．

関数 f の逆関数があるとき，f の逆関数を f^{-1} と書き表します．

$\boxed{例}$　集合 $\{2,3,4\}$ を定義域とする関数 f を次のように定めます：

$$f(2)=5\ ,\quad f(3)=7\ ,\quad f(4)=9\ .$$

この関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域 $\{5,7,9\}$ であり，

$$f^{-1}(5)=f^{-1}\big(f(2)\big)=2\ ,\quad f^{-1}(7)=f^{-1}\big(f(3)\big)=3\ ,\quad f^{-1}(9)=f^{-1}\big(f(4)\big)=4\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問題\ 7.6.2}$　集合 $\{2,3,4,5\}$ を定義域とする関数 f を次のように定めます：

$$f(2)=7\ ,\quad f(3)=9\ ,\quad f(4)=6\ ,\quad f(5)=8\ .$$

$f^{-1}(6)$, $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(8)$, $f^{-1}(9)$ を求めなさい．

$\boxed{例解}$　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=4x+5$ と定めます．この関数 f の逆関数 f^{-1} があるか調べます．f の値域は実数全体です．各実数 y に対して $f(x)=y$ となる実数 x を求めます．$f(x)=y$ つまり $4x+5=y$ より，$4x=y-5$ ，$x=\dfrac{y-5}{4}$ ．このように，各実数 y に対して $f(x)=y$ となる実数 x が唯一つに定まり，$x=\dfrac{y-5}{4}$ ．故に，関数 f の逆関数 f^{-1} があり，f^{-1} の定義域は f の値域なので実数全体であり，$f^{-1}(y)=\dfrac{y-5}{4}$ ．関数の独立変数は通常 x を用いるので，$f^{-1}(x)=\dfrac{x-5}{4}$ とします．　$\boxed{終}$

$\boxed{例題}$　区間 $[4,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=3x-5$ と定める．この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる．
〔解答〕f の値域は区間 $[7,\infty)$ である．この区間 $[7,\infty)$ の実数 y に対して $f(x)=y$ となる実数 x を求める．$f(x)=y$ つまり $3x-5=y$ より，$3x=y+5$ ，$x=\dfrac{y+5}{3}$ ．このように，区間 $[7,\infty)$ の各実数 y に対して $f(x)=y$ となる実数 x が唯一つに定まり，$x=\dfrac{y+5}{3}$ ．故に，関数 f の逆関数 f^{-1} があり，f^{-1} の定義域は f の値域なので区間 $[7,\infty)$ であり，$f^{-1}(x)=\dfrac{x+5}{3}$ ．

$\boxed{問題\ 7.6.3}$　区間 $[-4,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=2x+9$ と定めます．この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べなさい．

$\boxed{問題\ 7.6.4}$　区間 $[1,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=9-4x$ と定めます．この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べなさい．

定理 7.6.4　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，f の定義域の任意の要素 x 及び f の値域の任意の要素 y について

$$f(x)=y \iff f^{-1}(y)=x\ .$$

証明　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする．f の定義域の任意の要素 x 及び f の値域の任意の要素 y について，定理 7.6.1 より，

$$f^{-1}\big(f(x)\big)=x\ ,\qquad f\big(f^{-1}(y)\big)=y\ .$$

これらのことより，$y=f(x)$ ならば $f^{-1}(y)=f^{-1}\big(f(x)\big)=x$ ，$x=f^{-1}(y)$ ならば $f(x)=f\big(f^{-1}(y)\big)=y$ ．よって

$$f(x)=y \iff f^{-1}(y)=x\ .$$

（証明終り）

逆関数について更に以下の定理が成り立ちます（証明は省略します）．

定理 7.6.5　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，f^{-1} の定義域は f の値域であり，f^{-1} の値域は f の定義域である．

定理 7.6.6　関数 g が関数 f の逆関数であるとき，f は g の逆関数である．