§7.7　逆関数のグラフ

$\boxed{\text{例解}}$　集合 $\{1,2,3\}$ を定義域とする関数 f を次のように定めます：

$$f(1)=5\ ,\quad f(2)=7\ ,\quad f(3)=9\ .$$

f の逆関数 f^{-1} は次のようになります：

$$f^{-1}(5)=f^{-1}\big(f(1)\big)=1\ ,\quad f^{-1}(7)=f^{-1}\big(f(2)\big)=2\ ,\quad f^{-1}(9)=f^{-1}\big(f(3)\big)=3\ .$$

グラフは次のようになります：

f のグラフは集合 $\{(1,5),(2,7),(3,9)\}$,

f^{-1} のグラフは集合 $\{(5,1),(7,2),(9,3)\}$.　$\boxed{\text{終}}$

このように，関数 f のグラフの点とその逆関数 f^{-1} のグラフの点とでは成分が入れ替わります.

$\boxed{\text{問題 7.7.1}}$　集合 $\{1,3,5\}$ を定義域とする関数 f を次のように定めます：

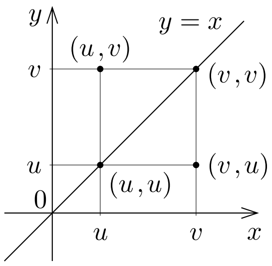
$$f(1)=4\ ,\quad f(3)=6\ ,\quad f(5)=8\ .$$

f^{-1} のグラフを求めなさい.

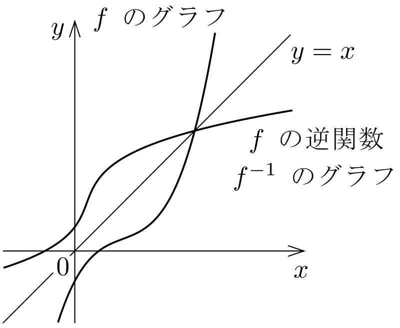
補助定理　任意の実数 u,v について，xy 座標平面において点 (u,v) と点 (v,u) とは直線 $y=x$ に関して対称である.

証明　$u=v$ のとき，$(u,v)=(v,u)$ で，この点は直線 $y=x$ に属す．よって点 (u,v) と点 (v,u) とは直線 $y=x$ に関して対称である.

$u\neq v$ のとき，座標平面において点 (u,u) と (u,v) と (v,v) と (v,u) とは正方形の頂点であり，正方形の頂点 (u,u) と (v,v) とを結ぶ対角線は直線 $y=x$ に含まれる．よって点 (u,v) と点 (v,u) とは直線 $y=x$ に関して対称である.　（証明終り）



xy 座標平面において，関数 f のグラフの点とその逆関数 f^{-1} のグラフの点とでは x 座標と y 座標とが入れ替わり，x 座標と y 座標とが入れ替わった点は元の点と直線 $y=x$ に関して対称です；従って，f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y=x$ に関して対称です.



定理 7.7　xy 座標平面において，関数 f の逆関数 f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である.

証明　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする．u を f の定義域の実数とし，v を f の値域の実数とする．定理 7.6.4 より

$$f(u)=v\iff f^{-1}(v)=u\ ;$$

従って，

$$\begin{aligned}\text{点 }(u,v)\text{ が }f\text{ のグラフに属す}&\iff f(u)=v\iff f^{-1}(v)=u\\&\iff \text{点 }(v,u)\text{ が }f^{-1}\text{ のグラフに属す}\ .\end{aligned}$$

上述の補助定理より，点 (u,v) と点 (v,u) とは直線 $y=x$ に関して対称である．従って f のグラフと f^{-1} のグラフとは直線 $y=x$ に関して対称である.

（証明終り）