

## § 7.7 逆関数のグラフ

**例解** 集合  $\{1, 2, 3\}$  を定義域とする関数  $f$  を次のように定めます：

$$f(1) = 5, \quad f(2) = 7, \quad f(3) = 9.$$

$f$  の逆関数  $f^{-1}$  は次のようになります：

$$f^{-1}(5) = f^{-1}(f(1)) = 1, \quad f^{-1}(7) = f^{-1}(f(2)) = 2, \quad f^{-1}(9) = f^{-1}(f(3)) = 3.$$

グラフは次のようになります：

$f$  のグラフは集合  $\{(1, 5), (2, 7), (3, 9)\}$  ,

$f^{-1}$  のグラフは集合  $\{(5, 1), (7, 2), (9, 3)\}$  .

**終**

このように、関数  $f$  のグラフの点とその逆関数  $f^{-1}$  のグラフの点とでは成分が入れ替わります。

**問題 7.7.1** 集合  $\{1, 3, 5\}$  を定義域とする関数  $f$  を次のように定めます：

$$f(1) = 4, \quad f(3) = 6, \quad f(5) = 8.$$

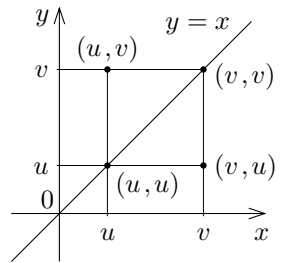
$f^{-1}$  のグラフを求めなさい。

**補助定理** 任意の実数  $u, v$  について、 $xy$  座標平面において点  $(u, v)$  と点  $(v, u)$  とは直線  $y = x$  に関して対称である。

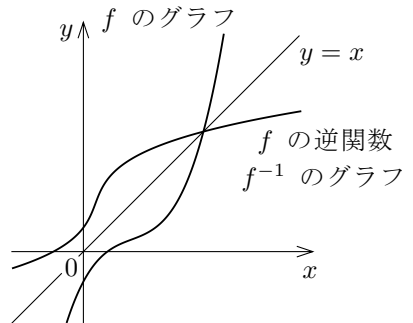
**証明**  $u = v$  のとき、 $(u, v) = (v, u)$  で、この点は直線  $y = x$  に属す。よって点  $(u, v)$  と点  $(v, u)$  とは直線  $y = x$  に関して対称である。

$u \neq v$  のとき、座標平面において点  $(u, u)$  と  $(u, v)$  と  $(v, v)$  と  $(v, u)$  とは正方形の頂点であり、正方形の頂点  $(u, u)$  と  $(v, v)$  とを結ぶ対角線は直線  $y = x$  に含まれる。よって点  $(u, v)$  と点  $(v, u)$  とは直線  $y = x$  に関して対称である。

(証明終り)



$xy$  座標平面において、関数  $f$  のグラフの点とその逆関数  $f^{-1}$  のグラフの点とでは  $x$  座標と  $y$  座標とが入れ替わり、 $x$  座標と  $y$  座標とが入れ替わった点は元の点と直線  $y = x$  に関して対称です；従って、 $f^{-1}$  のグラフは  $f$  のグラフと直線  $y = x$  に関して対称です。



**定理 7.7**  $xy$  座標平面において、関数  $f$  の逆関数  $f^{-1}$  のグラフは  $f$  のグラフと直線  $y = x$  に関して対称である。

**証明** 関数  $f$  の逆関数  $f^{-1}$  があるとする。  $u$  を  $f$  の定義域の実数とし、  $v$  を  $f$  の値域の実数とする。定理 7.6.4 より

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u;$$

従って、

$$\begin{aligned} \text{点 } (u, v) \text{ が } f \text{ のグラフに属す} &\iff f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u \\ &\iff \text{点 } (v, u) \text{ が } f^{-1} \text{ のグラフに属す。} \end{aligned}$$

上述の補助定理より、点  $(u, v)$  と点  $(v, u)$  とは直線  $y = x$  に関して対称である。従って  $f$  のグラフと  $f^{-1}$  のグラフとは直線  $y = x$  に関して対称である。

(証明終り)