§7.9　関数の平均変化率

例　物理実験によって次のことが知られています：物体が自由落下するとき，0 以上の実数 t に対して，落下し始めてから t 秒後の落下距離は約 $4.9t^2\,\mathrm{m}$ である[6]．つまり，t 秒後の落下距離（単位は m）を $\varphi(t)$ とおくと，$\varphi(t) = 4.9t^2$ です．

物体が落下している間の時間（単位は秒）に対する落下の平均の速さ（単位は m/s）を考えます．落下している間のある時刻からある時刻までの落下の平均の速さは次のようになります：

$$\text{落下の平均の速さ} = \frac{\text{落下距離}}{\text{落下時間}}\ .$$

例えば，落下開始 3 秒後から 5 秒後までの 2 秒間に，落下距離は $\varphi(3) = 4.9\times3^2$ から $\varphi(5) = 4.9\times5^2$ に変化します；この間の落下距離は $\varphi(5)-\varphi(3) = 4.9\times5^2-4.9\times3^2$ ですから，この間の落下の平均の速さは

$$\frac{\varphi(5)-\varphi(3)}{5-3} = \frac{4.9\times5^2-4.9\times3^2}{2} = \frac{122.5-44.1}{2} = 39.2\ .$$

0 以上の実数 a, b（但し $a \neq b$ ）とに対して，落下開始 a 秒後から b 秒後まで $(b-a)$ 秒間に，落下距離は $\varphi(a) = 4.9a^2$ から $\varphi(b) = 4.9b^2$ に変化します；この間の落下距離は $\varphi(b)-\varphi(3) = 4.9b^2-4.9a^2$ ですから，この間の落下の平均の速さは

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} &= \frac{4.9b^2-4.9a^2}{b-a} = \frac{4.9(b^2-a^2)}{b-a} = \frac{4.9(b+a)(b-a)}{b-a}\\ &= 4.9(a+b)\ .\end{aligned}$$

終

この例の落下の平均の速さ $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$ を一般化して，関数の平均変化率というものを考えます．

定義　関数 f の定義域に属す実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率[7]とは，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ の値である．

関数 f の平均変化率は，f の値が変化する平均の速さです．

例題　実数全体を定義域とする 1 次関数 f を $f(x) = 3x-2$ と定める．実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率を求める．

$f(a) = 3a-2$ ，$f(b) = 3b-2$ なので，f の a から b までの平均変化率は

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{3b-2-(3a-2)}{b-a} = \frac{3b-3a}{b-a} = \frac{3(b-a)}{b-a} = 3\ .$$

終

問題 7.9.1　実数全体を定義域とする 1 次関数 f を $f(x) = -4x+7$ と定めます．実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率を求めなさい．

例題　実数全体を定義域とする 2 次関数 f を $f(x) = 3x^2-5x+4$ と定める．実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率を求める．

$f(a) = 3a^2-5a+4$ ，$f(b) = 3b^2-5b+4$ なので，f の a から b までの平均変化率は

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= \frac{3b^2-5b+4-(3a^2-5a+4)}{b-a} = \frac{3b^2-3a^2-5b+5a}{b-a}\\ &= \frac{3(b^2-a^2)-5(b-a)}{b-a} = \frac{3(b-a)(b+a)-5(b-a)}{b-a} = 3(b+a)-5\\ &= 3(a+b)-5\ .\end{aligned}$$

終

問題 7.9.2　実数全体を定義域とする 2 次関数 f を $f(x) = -3x^2+4x+5$ と定めます．実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率を求めなさい．

例題　実数全体を定義域とする 3 次関数 f を $f(x) = 2x^3$ と定める．実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率を求める．

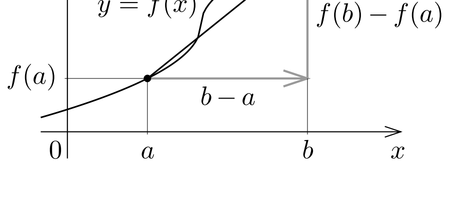
$f(a) = 2a^3$ ，$f(b) = 2b^3$ なので，f の a から b までの平均変化率は

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= \frac{2b^2-2a^3}{b-a} = \frac{2(b^3-a^3)}{b-a}\\ &= \frac{2(b-a)(b^2+ab+a^2)}{b-a} = 2(b^2+ab+a^2)\\ &= 2(a^2+ab+b^2)\ .\end{aligned}$$

終

問題 7.9.3　実数全体を定義域とする 3 次関数 f を $f(x) = 4x^3$ と定めます．実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの関数 f の平均変化率を求めなさい．

関数 f の定義域に属す実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ は，座標平面における f のグラフの点 $(a, f(a))$ と $(b, f(b))$ とを結ぶ線分の傾きです．



[6] 空気抵抗など細かいことは無視できるとします．

[7] 変化の割合ということもあります．