

第7章の補遺2 関数の正体

関数とは唯一つのものを定める対応であると述べましたが、それでは対応とは何か、疑問が残るかもしれません。対応とは何か、関数とは何か、数学的な定義を述べます。

第0章第8節で述べたように、集合 A と B とに対して、 A の要素 x と B の要素 y との順序対 (x, y) の全体を A と B との直積集合といい、 $A \times B$ と書き表します：

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B \} .$$

A と B との直積集合 $A \times B$ の部分集合 C を考えます。 A の要素 x に B の要素 y とについて、 $(x, y) \in C$ のときにだけ x に y が対応すると考えます：

$$x \text{ に } y \text{ が対応する} \iff (x, y) \in C .$$

この集合 C が対応であると考えます。つまり、対応とは、数学的には、直積集合の部分集合のことです。

例 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ と集合 $B = \{a, b\}$ との直積集合 $A \times B$ は次のようになります：

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\} .$$

例えばこの直積集合 $A \times B$ の部分集合

$$\{(1, a), (2, a), (2, b), (3, b)\}$$

が対応です；この対応では、1 に a が対応し、2 に a と b とが対応し、3 に b が対応します。 終

集合 S を定義域とする対応とは、 S とある集合 T の直積集合

$$S \times T = \{ (x, y) \mid x \in S \text{ かつ } y \in T \}$$

の部分集合のことです。そして、集合 S を定義域とする対応 C が関数であるとは、 S の各要素 x に対して $(x, y) \in C$ となる y が唯一つに定まることです。

例 集合 $S = \{1, 2, 3\}$ を定義域とする対応を考えます。 a と b とは異なるものとします。 S を定義域とする対応 $\{(1, a), (2, a), (2, b), (3, b)\}$ は関数ではありません；何故なら、2 に a と b と異なる2つのものが対応します。 S を定義域とする対応 $\{(1, a), (3, b)\}$ は関数ではありません；何故なら、2 に対応するものがありません。 S を定義域とする対応 $\{(1, a), (2, b), (3, a)\}$ は関数です：1 に a だけが対応し、2 に b だけが対応し、3 に a だけが対応します。 終

集合 S を定義域とする関数 f について、 S の各要素 x に対して $(x, y) \in f$ となる y が唯一つに定まります；この y を x に対する f の値といい、 $f(x)$ と書き表しました。つまり次のようになります：

$$y = f(x) \iff (x, y) \in f .$$

例 集合 $S = \{1, 2, 3\}$ を定義域とする対応を考えます。 a と b とは異なるものとします。 S を定義域とする対応 $f = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$ は関数です。この関数 f について次のようになります： $(1, a) \in f$ なので $f(1) = a$, $(2, b) \in f$ なので $f(2) = b$, $(3, a) \in f$ なので $f(3) = a$. 終

例 実数全体を定義域とする1次関数 f を $f(x) = 2x + 3$ と定めるということは、 $f = \{(x, 2x + 3) \mid x \text{ は実数}\}$ と定めることです。区間 $[0, 7]$ を定義域とする2次関数 g を $g(x) = x^2$ ($0 \leq x \leq 7$) と定めることは、 $g = \{(x, x^2) \mid x \text{ は実数で } 0 \leq x \leq 7\}$ と定めることです。 終

関数 f について、

$$\text{各実数 } x, y \text{ について } (x, y) \in f \iff y = f(x)$$

なので、 f は、 $y = f(x)$ となる実数 x と y との順序対 (x, y) の全体、つまり f のグラフです。このように、関数 f のグラフが f の正体です。