

## 第7章の補遺2 関数の正体

関数とは唯一つのものを定める対応であると述べましたが、それでは対応とは何か、疑問が残るかもしれません。対応とは何か、関数とは何か、数学的な定義を述べます。

第0章第8節で述べたように、集合  $A$  と  $B$  とに対して、 $A$  の要素  $x$  と  $B$  の要素  $y$  との順序対  $(x, y)$  の全体を  $A$  と  $B$  との直積集合といい、 $A \times B$  と書き表します：

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B \} .$$

$A$  と  $B$  との直積集合  $A \times B$  の部分集合  $C$  を考えます。 $A$  の要素  $x$  に  $B$  の要素  $y$  とについて、 $(x, y) \in C$  のときにだけ  $x$  に  $y$  が対応すると考えます：

$$x \text{ に } y \text{ が対応する} \iff (x, y) \in C .$$

この集合  $C$  が対応であると考えます。つまり、対応とは、数学的には、直積集合の部分集合のことです。

**例** 集合  $A = \{1, 2, 3\}$  と集合  $B = \{a, b\}$  との直積集合  $A \times B$  は次のようになります：

$$A \times B = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \} .$$

例えばこの直積集合  $A \times B$  の部分集合

$$\{ (1, a), (2, a), (2, b), (3, b) \}$$

が対応です；この対応では、1 に  $a$  が対応し、2 に  $a$  と  $b$  とが対応し、3 に  $b$  が対応します。 終

集合  $S$  を定義域とする対応とは、 $S$  とある集合  $T$  の直積集合

$$S \times T = \{ (x, y) \mid x \in S \text{ かつ } y \in T \}$$

の部分集合のことです。そして、集合  $S$  を定義域とする対応  $C$  が関数であるとは、 $S$  の各要素  $x$  に対して  $(x, y) \in C$  となる  $y$  が唯一つに定まることです。

**例** 集合  $S = \{1, 2, 3\}$  を定義域とする対応を考えます。 $a$  と  $b$  とは異なるものとします。 $S$  を定義域とする対応  $\{ (1, a), (2, a), (2, b), (3, b) \}$  は関数ではありません；何故なら、2 に  $a$  と  $b$  と異なる2つのものが対応します。 $S$  を定義域とする対応  $\{ (1, a), (3, b) \}$  は関数ではありません；何故なら、2 に対応するものがありません。 $S$  を定義域とする対応  $\{ (1, a), (2, b), (3, a) \}$  は関数です：1 に  $a$  だけが対応し、2 に  $b$  だけが対応し、3 に  $a$  だけが対応します。 終

集合  $S$  を定義域とする関数  $f$  について、 $S$  の各要素  $x$  に対して  $(x, y) \in f$  となる  $y$  が唯一つに定まります；この  $y$  を  $x$  に対する  $f$  の値といい、 $f(x)$  と書き表しました。つまり次のようになります：

$$y = f(x) \iff (x, y) \in f .$$

**例** 集合  $S = \{1, 2, 3\}$  を定義域とする対応を考えます。 $a$  と  $b$  とは異なるものとします。 $S$  を定義域とする対応  $f = \{ (1, a), (2, b), (3, a) \}$  は関数です。この関数  $f$  について次のようになります： $(1, a) \in f$  なので  $f(1) = a$  ,  $(2, b) \in f$  なので  $f(2) = b$  ,  $(3, a) \in f$  なので  $f(3) = a$  . 終

**例** 実数全体を定義域とする1次関数  $f$  を  $f(x) = 2x + 3$  と定めるということは、 $f = \{ (x, 2x + 3) \mid x \text{ は実数} \}$  と定めることです。区間  $[0, 7]$  を定義域とする2次関数  $g$  を  $g(x) = x^2$  ( $0 \leq x \leq 7$ ) と定めることは、 $g = \{ (x, x^2) \mid x \text{ は実数で } 0 \leq x \leq 7 \}$  と定めることです。 終

関数  $f$  について、

$$\text{各実数 } x, y \text{ について } (x, y) \in f \iff y = f(x)$$

なので、 $f$  は、 $y = f(x)$  となる実数  $x$  と  $y$  との順序対  $(x, y)$  の全体、つまり  $f$  のグラフです。このように、関数  $f$  のグラフが  $f$  の正体です。