§8.1　平方の逆関数

関数 x^2 の逆関数を考えます．実数を表す変数 x, y について $y = x^2$ とおきます．$x^2 \geq 0$ なので $y \geq 0$ ．$x = \pm\sqrt{y}$ なので，y の値に対応する x の値は唯一つとは限りません；しかし $x \geq 0$ という条件を付けると，$x = \sqrt{y}$ なので，y の値に対応する x の値は唯一つです．従って，変数 x について $x \geq 0$ とすると，つまり定義域を区間 $[0,\infty)$ に制限すると，定理7.6.2より関数 x^2 の逆関数があります．区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 x^2 の値域は区間 $[0,\infty)$ です．従って，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 x^2 の逆関数は，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 $\sqrt{x}$ です．

定理 8.1　区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 x^2 の逆関数は，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 $\sqrt{x}$ である．

2 次関数の逆関数を考えます．

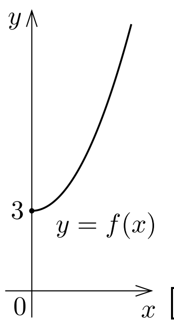
例題　区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 3$ と定め，区間 $[3,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sqrt{2x-6}$ と定める．g は f の逆関数であることを示す．

〔方針〕 関数 g が関数 f の逆関数であるとは，f の値域が g の定義域であり，f の定義域の任意の要素 x について $g\big(f(x)\big) = x$ となることである．

〔解答〕 f の値域は区間 $[3,\infty)$ なので g の定義域と一致する．f の定義域の任意の実数 x について，

$$g\big(f(x)\big) = \sqrt{2f(x)-6} = \sqrt{2\left(\frac{x^2}{2}+3\right)-6} = \sqrt{x^2+6-6} = \sqrt{x^2}\ ,$$

x は区間 $[0,\infty)$ に属すので $x \geq 0$ ，よって $\sqrt{x^2} = x$ なので，$g\big(f(x)\big) = x$ ．故に g は f の逆関数である．



終

問題 8.1.1　区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{x^2}{3} - 5$ と定め，区間 $[-5,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sqrt{3x+15}$ と定めます．g は f の逆関数であることを示しなさい．

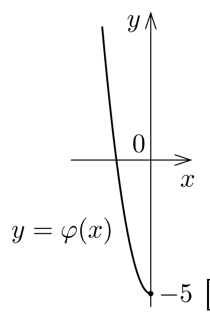
例題　区間 $(-\infty,0]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 3x^2 - 5$ と定め，区間 $[-5,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = -\sqrt{\dfrac{x+5}{3}}$ と定める．ψ は φ の逆関数であることを示す．

〔方針〕 関数 ψ が関数 φ の逆関数であるとは，φ の値域が ψ の定義域であり，φ の定義域の任意の要素 x について $\psi\big(\varphi(x)\big) = x$ となることである．

〔解答〕 φ の値域は区間 $[-5,\infty)$ なので ψ の定義域と一致する．φ の定義域の任意の実数 x について，

$$\psi\big(\varphi(x)\big) = -\sqrt{\frac{\varphi(x)+5}{3}} = -\sqrt{\frac{(3x^2-5)+5}{3}} = -\sqrt{x^2}\ ,$$

x は区間 $(-\infty,0]$ に属すので $x \leq 0$ ，よって $-x \geq 0$ なので，$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$ ；従って $\psi\big(\varphi(x)\big) = -(-x) = x$ ．故に ψ は φ の逆関数である．

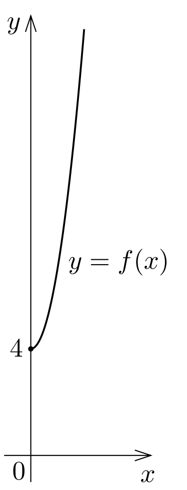


終

問題 8.1.2　区間 $(-\infty,0]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 4x^2 + 3$ と定め，区間 $[3,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = -\sqrt{\dfrac{x-3}{4}}$ と定めます．ψ は φ の逆関数であることを示しなさい．

例題　区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 3x^2 + 4$ と定める．この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる．

〔解説〕 関数 f の値域は区間 $[4,\infty)$ ．この区間 $[4,\infty)$ の実数 y に対して $f(x) = y$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 x を求める．$f(x) = y$ つまり $3x^2 + 4 = y$ より，$3x^2 = y - 4$ ，$x^2 = \dfrac{y-4}{3}$ ，$x = \pm\sqrt{\dfrac{y-4}{3}}$ ；x は区間 $[0,\infty)$ の実数なので $x \geq 0$ ，よって $x = \sqrt{\dfrac{y-4}{3}}$ ．このように，区間 $[4,\infty)$ の各実数 y に対して $f(x) = y$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 x が唯一つ定まり，$x = \sqrt{\dfrac{y-4}{3}}$ ．故に，関数 f の逆関数 f^{-1} があり，f^{-1} の定義域は区間 $[4,\infty)$ であり，$f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ ．

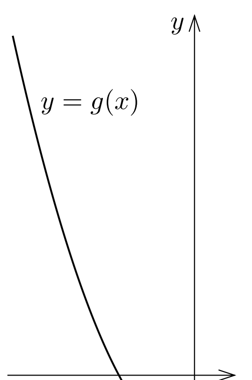


終

問題 8.1.3　区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 5x^2 - 7$ と定めます．この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べなさい．

例解　区間 $(-\infty,0]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \dfrac{x^2-8}{3}$ と定める．この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる．

〔解説〕 関数 g の値域は区間 $\left[-\dfrac{8}{3},\infty\right)$ ．この区間 $\left[\dfrac{8}{3},\infty\right)$ の実数 y に対して $g(x) = y$ となる区間 $(-\infty,0]$ の実数 x を求める．$g(x) = y$ つまり $\dfrac{x^2-8}{3} = y$ なので，$x^2 - 8 = 3y$ ，$x^2 = 3y + 8$ ，$x = \pm\sqrt{3y+8}$ ；x は区間 $(-\infty,0]$ の実数なので $x \leq 0$ ，よって $x = -\sqrt{3y+8}$ ．このように，区間 $\left[-\dfrac{8}{3},\infty\right)$ の各実数 y に対して $g(x) = y$ となる区間 $(-\infty,0]$ の実数 x が唯一つ定まり，$x = -\sqrt{3y+8}$ ．故に，関数 g の逆関数 g^{-1} があり，g^{-1} の定義域は区間 $\left[-\dfrac{8}{3},\infty\right)$ であり，$g^{-1}(x) = -\sqrt{3x+8}$ ．



終

問題 8.1.4　区間 $(-\infty,0]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \dfrac{x^2+5}{2}$ と定めます．この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べなさい．