

§ 8.1 平方の逆関数

関数 x^2 の逆関数を考えます。実数を表す変数 x, y について $y = x^2$ とおきます。 $x^2 \geq 0$ なので $y \geq 0$ 。 $x = \pm\sqrt{y}$ なので、 y の値に対応する x の値は唯一つとは限りません；しかし $x \geq 0$ という条件を付けると、 $x = \sqrt{y}$ なので、 y の値に対応する x の値は唯一つだけです。従って、変数 x について $x \geq 0$ とすると、つまり定義域を区間 $[0, \infty)$ に制限すると、定理 7.6.2 より関数 x^2 の逆関数があります。区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 x^2 の値域は区間 $[0, \infty)$ です。従って、区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 x^2 の逆関数は、区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 \sqrt{x} です。

定理 8.1 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 x^2 の逆関数は、区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 \sqrt{x} である。

2次関数の逆関数を考えます。

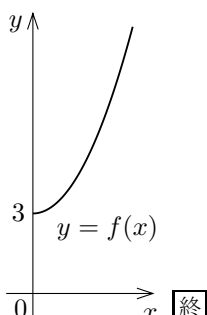
例題 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{x^2}{2} + 3$ と定め、区間 $[3, \infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sqrt{2x-6}$ と定める。 g は f の逆関数であることを示す。

【方針】 関数 g が関数 f の逆関数であるとは、 f の値域が g の定義域であり、 f の定義域の任意の要素 x について $g(f(x)) = x$ となることである。

【解答】 f の値域は区間 $[3, \infty)$ なので g の定義域と一致する。 f の定義域の任意の実数 x について、

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sqrt{2f(x)-6} = \sqrt{2\left(\frac{x^2}{2}+3\right)-6} = \sqrt{x^2+6-6} \\ &= \sqrt{x^2}, \end{aligned}$$

x は区間 $[0, \infty)$ に属するので $x \geq 0$ ，よって $\sqrt{x^2} = x$ なので、 $g(f(x)) = x$ 。故に g は f の逆関数である。



問題 8.1.1 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{x^2}{3} - 5$ と定め、区間 $[-5, \infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sqrt{3x+15}$ と定めます。 g は f の逆関数であることを示しなさい。

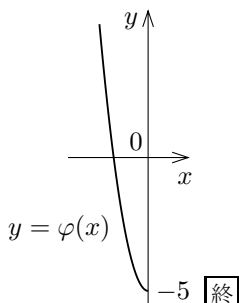
例題 区間 $(-\infty, 0]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 3x^2 - 5$ と定め、区間 $[-5, \infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = -\sqrt{\frac{x+5}{3}}$ と定める。 ψ は φ の逆関数であることを示す。

【方針】 関数 ψ が関数 φ の逆関数であるとは、 φ の値域が ψ の定義域であり、 φ の定義域の任意の要素 x について $\psi(\varphi(x)) = x$ となることである。

【解答】 φ の値域は区間 $[-5, \infty)$ なので ψ の定義域と一致する。 φ の定義域の任意の実数 x について、

$$\psi(\varphi(x)) = -\sqrt{\frac{\varphi(x)+5}{3}} = -\sqrt{\frac{(3x^2-5)+5}{3}} = -\sqrt{x^2},$$

x は区間 $(-\infty, 0]$ に属するので $x \leq 0$ ，よって $-\sqrt{x^2} = -|x| = x$ になるので、 $\psi(\varphi(x)) = x$ 。故に ψ は φ の逆関数である。



問題 8.1.2 区間 $(-\infty, 0]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 4x^2 + 3$ と定め、区間 $[3, \infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = -\sqrt{\frac{x-3}{4}}$ と定めます。 ψ は φ の逆関数であることを示しなさい。

例題 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 3x^2 + 4$ と定める。この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる。

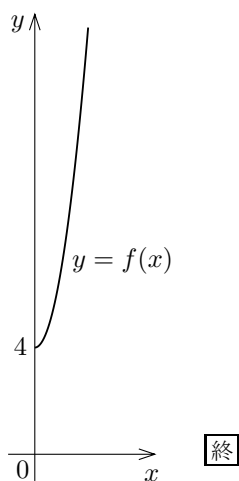
【解説】 関数 f の値域は区間 $[4, \infty)$ 。この区間 $[4, \infty)$

の実数 y に対して $f(x) = y$ となる区間 $[0, \infty)$ の実数 x を求める。 $f(x) = y$ つまり $3x^2 + 4 = y$ より、 $3x^2 = y - 4$ ， $x^2 = \frac{y-4}{3}$ ， $x = \pm\sqrt{\frac{y-4}{3}}$ ； x は区間

$[0, \infty)$ の実数なので $x \geq 0$ ，よって $x = \sqrt{\frac{y-4}{3}}$ 。この

ように、区間 $[4, \infty)$ の各実数 y に対して $f(x) = y$ となる区間 $[0, \infty)$ の実数 x が唯一つ定まり、 $x = \sqrt{\frac{y-4}{3}}$ 。

故に、関数 f の逆関数 f^{-1} があり、 f^{-1} の定義域は区間 $[4, \infty)$ であり、 $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-4}{3}}$ 。



問題 8.1.3 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 5x^2 - 7$ と定めます。この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べなさい。

例題 区間 $(-\infty, 0]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \frac{x^2-8}{3}$ と定める。この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる。

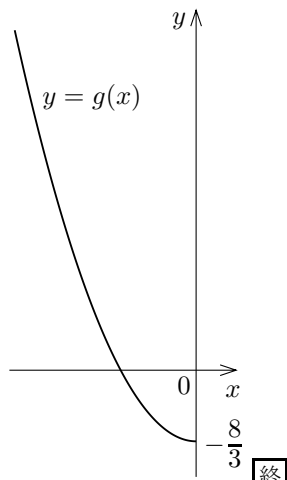
【解説】 関数 g の値域は区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$ 。この

区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$ の実数 y に対して $g(x) = y$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 x を求める。 $g(x) = y$ つまり

$\frac{x^2-8}{3} = y$ なので、 $x^2-8 = 3y$ ， $x^2 = 3y+8$ ， $x = \pm\sqrt{3y+8}$ ； x は区間 $(-\infty, 0]$ の実数なので $x \leq 0$ ，

よって $x = -\sqrt{3y+8}$ 。このように、区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$ の各実数 y に対して $g(x) = y$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 x が唯一つ定まり、 $x = -\sqrt{3y+8}$ 。故に、関数 g

の逆関数 g^{-1} があり、 g^{-1} の定義域は区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$ であり、 $g^{-1}(x) = -\sqrt{3x+8}$ 。



問題 8.1.4 区間 $(-\infty, 0]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \frac{x^2+5}{2}$ と定めます。この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べなさい。