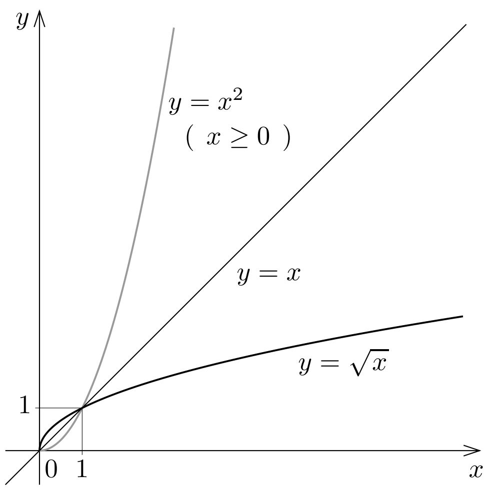
§8.2　簡単な無理関数のグラフ

　xy 座標平面において，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフを描きます． 関数 g が関数 f の逆関数であるとき， $y=g(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称です（定理7.7）． 8.1節で述べたように，関数 $\sqrt{x}$ （ $x\geq 0$ ）は関数 x^2 （ $x\geq 0$ ）の逆関数です；従って $y=\sqrt{x}$ （ $x\geq 0$ ）のグラフは $y=x^2$ （ $x\geq 0$ ）のグラフと直線 $y=x$ に関して対称です．

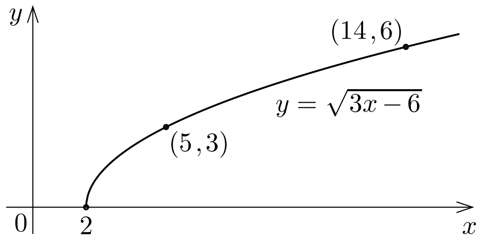


　1次関数と関数 $\sqrt{x}$ との合成関数のグラフを考えます．

例解　xy 座標平面において，区間 $[2,\infty)$ を定義域とする関数 $y=\sqrt{3x-6}$ のグラフを描きます． 関数 $y=\sqrt{3x-6}$ について， $\sqrt{3x-6}\geq 0$ なので $y\geq 0$ ． また， $y=\sqrt{3x-6}$ を2乗すると $y^2=\sqrt{3x-6}^{\,2}=3x-6$ なので， $3x=y^2+6$ ，よって $x=\frac{1}{3}y^2+2$ ． これより，実数 x,y （ $x\geq 2$ ）について，

$$y=\sqrt{3x-6} \iff x=\frac{1}{3}y^2+2 \text{ かつ } y\geq 0 \quad .$$

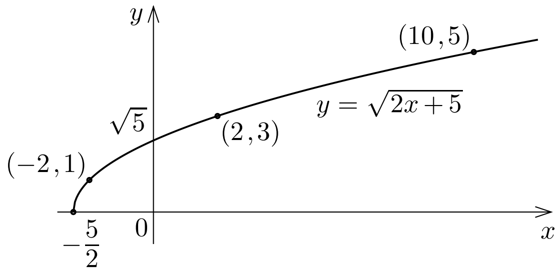
変数 x は変数 y の2次関数ですから，そのグラフは放物線になります． $y=0$ のとき $x=2$ ． $y=3$ のとき $x=5$ ． $y=6$ のとき $x=14$ ． $y=\sqrt{3x+6}$ のグラフは，点 $(2,0)$, $(5,3),(14,6)$ などを通ります．



終

例題　xy 座標平面において区間 $\left[-\frac{5}{2},\infty\right)$ を定義域とする関数 $y=\sqrt{2x+5}$ のグラフを描く．

〔解答〕 $y=\sqrt{2x+5}\geq 0$ ． また， $y=\sqrt{2x+5}$ より， $y^2=2x+5$ ， $x=\dfrac{y^2-5}{2}$ ． $y=\sqrt{2x+5}$ のグラフは，不等式 $y\geq 0$ と方程式 $x=\dfrac{y^2-5}{2}$ とで表される放物線であり，点 $\left(-\frac{5}{2},0\right),\left(0,\sqrt{5}\right),(-2,1),(2,3),(10,5)$ などを通る．

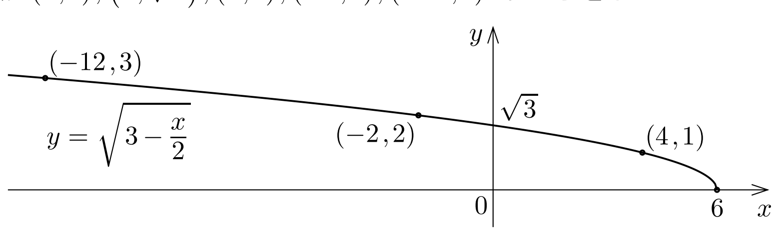


終

問題 8.2.1　xy 座標平面において区間 $\left[-\frac{4}{3},\infty\right)$ を定義域とする関数 $y=\sqrt{3x+4}$ のグラフの概形を描きなさい．

例題　xy 座標平面において区間 $(-\infty,6]$ を定義域とする関数 $y=\sqrt{3-\frac{x}{2}}$ のグラフを描く．

〔解答〕 $y=\sqrt{3-\frac{x}{2}}\geq 0$ ． また， $y=\sqrt{3-\frac{x}{2}}$ より， $y^2=3-\frac{x}{2}$ ， $x=6-2y^2$ ． $y=\sqrt{3-\frac{x}{2}}$ のグラフは，不等式 $y\geq 0$ と方程式 $x=6-2y^2$ とで表される放物線であり，点 $(6,0),\left(0,\sqrt{3}\right),(4,1),(-2,2),(-12,3)$ などを通る．



終

問題 8.2.2　xy 座標平面において区間 $\left(-\infty,\frac{15}{2}\right]$ を定義域とする関数 $y=\sqrt{5-\frac{2}{3}x}$ のグラフの概形を描きなさい．