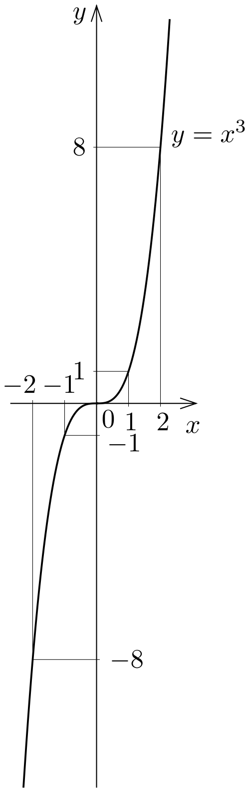
§8.3　立方の逆関数

実数 x に対して x の3乗 x^3 を x の立方ということがあります．

関数 x^3 について考えます． xy 座標平面において $y=x^3$ のグラフを描くと右図のようになります． このグラフを見ると分かるように，任意の実数 y に対して，$x^3=y$ となる実数 x が唯一つあります． つまり，実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3$ と定めるとき，任意の実数 y に対して $f(x)=y$ となる実数 x は唯一つあります． 従って定理7.6.2より，この関数 f の逆関数 g があります． f の値域は実数全体ですから，f の逆関数 g の定義域は実数全体です． この逆関数 g の値 $g(x)$ を $\sqrt[3]{x}$ と書き表します： $g(x)=\sqrt[3]{x}$ ．



a を任意の実数とします． 関数 $g(x)=\sqrt[3]{x}$ は関数 $f(x)=x^3$ の逆関数ですから，定理7.6.1より，

$$g\bigl(f(a)\bigr)=a\ ,\qquad f\bigl(g(a)\bigr)=a\ ;$$

$f(x)=x^3$ ， $g(x)=\sqrt[3]{x}$ より

$$g\bigl(f(a)\bigr)=\sqrt[3]{a^3}\ ,\qquad f\bigl(g(a)\bigr)=\bigl(\sqrt[3]{a}\bigr)^3\ ;$$

よって

$$\sqrt[3]{a^3}=a\ ,\qquad \bigl(\sqrt[3]{a}\bigr)^3=a\ .$$

定理　任意の実数 a について，

$$\sqrt[3]{a^3}=a\ ,\qquad \bigl(\sqrt[3]{a}\bigr)^3=a\ .$$

$\bigl(\sqrt[3]{A}\bigr)^3$ を $\sqrt[3]{A}^{\,3}$ のように略します．

$\boxed{\text{例題}}$　次の式を計算して簡単にする： $\sqrt[3]{64}$ ， $\sqrt[3]{-8}$ ， $\sqrt[3]{5}^{\,6}$ ．

$$\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4\ .$$
$$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2\ .$$

1.2節で述べた指数法則 $a^{mn}=(a^m)^n$ （ m,n は自然数） を用いる：

$$\sqrt[3]{5}^{\,6}=\sqrt[3]{5}^{\,3\cdot2}=\bigl(\sqrt[3]{5}^{\,3}\bigr)^2=5^2=25\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.3}}$　以下の式を計算して簡単にしなさい．

(1) $\sqrt[3]{125}$ ．　　(2) $\sqrt[3]{-27}$ ．　　(3) $\sqrt[3]{-2}^{\,9}$ ．

定理1.6.5と似たような定理が成り立ちます（証明は略します）．

定理　任意の実数 a,b について，

$$\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}\ ,\qquad b\neq0 \text{ のとき } \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\ .$$