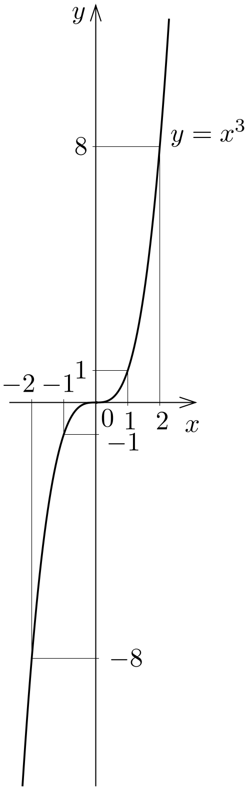
§8.3　立方の逆関数

実数 x に対して x の3乗 x^3 を x の立方ということがあります．

関数 x^3 について考えます． xy 座標平面において $y = x^3$ のグラフを描くと右図のようになります． このグラフを見ると分かるように，任意の実数 y に対して，$x^3 = y$ となる実数 x が唯一つだけあります． つまり，実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3$ と定めるとき，任意の実数 y に対して $f(x) = y$ となる実数 x は唯一つだけあります． 従って定理7.6.2より，この関数 f の逆関数 g があります． f の値域は実数全体ですから，f の逆関数 g の定義域は実数全体です． この逆関数 g の値 $g(x)$ を $\sqrt[3]{x}$ と書き表します： $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ．



a を任意の実数とします． 関数 $g(x) = \sqrt[3]{x}$ は関数 $f(x) = x^3$ の逆関数ですから，定理7.6.1より，

$$g\big(f(a)\big) = a \ , \qquad f\big(g(a)\big) = a \ ;$$

$f(x) = x^3$ ，$g(x) = \sqrt[3]{x}$ より

$$g\big(f(a)\big) = \sqrt[3]{a^3} \ , \qquad f\big(g(a)\big) = \big(\sqrt[3]{a}\big)^3 \ ;$$

よって

$$\sqrt[3]{a^3} = a \ , \qquad \big(\sqrt[3]{a}\big)^3 = a \ .$$

定理 8.3　任意の実数 a について，

$$\sqrt[3]{a^3} = a \ , \qquad \big(\sqrt[3]{a}\big)^3 = a \ .$$

$\big(\sqrt[3]{A}\big)^3$ を $\sqrt[3]{A}^{\,3}$ のように略します．

例題　次の式を計算して簡単にする： $\sqrt[3]{64}$ ，$\sqrt[3]{-8}$ ，$\sqrt[3]{5}^{\,6}$ ．

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4 \ .$$

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2 \ .$$

1.2節で述べた指数法則 $a^{mn} = (a^m)^n$ （m, n は自然数） を用いる：

$$\sqrt[3]{5}^{\,6} = \sqrt[3]{5}^{\,3\cdot 2} = \big(\sqrt[3]{5}^{\,3}\big)^2 = 5^2 = 25 \ .$$

終

問題 8.3　以下の式を計算して簡単にしなさい．

(1) $\sqrt[3]{125}$ ．　(2) $\sqrt[3]{-27}$ ．　(3) $\sqrt[3]{-2}^{\,9}$ ．