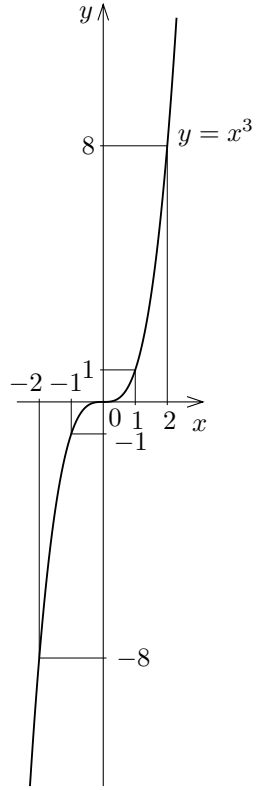


§ 8.3 立方の逆関数

実数 x に対して x の 3 乗 x^3 を x の立方ということがあります。

関数 x^3 について考えます。 xy 座標平面において $y = x^3$ のグラフを描くと右図のようになります。 このグラフを見ると分かるように、任意の実数 y に対して、 $x^3 = y$ となる実数 x が唯一だけあります。 つまり、実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3$ と定めるとき、任意の実数 y に対して $f(x) = y$ となる実数 x は唯一だけあります。 従って定理 7.6.2 より、この関数 f の逆関数 g があります。 f の値域は実数全体ですから、 f の逆関数 g の定義域は実数全体です。 この逆関数 g の値 $g(x)$ を $\sqrt[3]{x}$ と書き表します： $g(x) = \sqrt[3]{x}$.



a を任意の実数とします。 関数 $g(x) = \sqrt[3]{x}$ は関数 $f(x) = x^3$ の逆関数ですから、定理 7.6.1 より、

$$g(f(a)) = a, \quad f(g(a)) = a;$$

$f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ より

$$g(f(a)) = \sqrt[3]{a^3}, \quad f(g(a)) = (\sqrt[3]{a})^3;$$

よって

$$\sqrt[3]{a^3} = a, \quad (\sqrt[3]{a})^3 = a.$$

定理 8.3 任意の実数 a について、

$$\sqrt[3]{a^3} = a, \quad (\sqrt[3]{a})^3 = a.$$

$(\sqrt[3]{A})^3$ を $\sqrt[3]{A^3}$ のように略します。

例題 次の式を計算して簡単にする： $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{5^6}$.

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4.$$

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2.$$

1.2 節で述べた指数法則 $a^{mn} = (a^m)^n$ (m, n は自然数) を用いる：

$$\sqrt[3]{5^6} = \sqrt[3]{5^{3 \cdot 2}} = (\sqrt[3]{5^3})^2 = 5^2 = 25.$$

終

問題 8.3 以下の式を計算して簡単にしなさい。

(1) $\sqrt[3]{125}$.

(2) $\sqrt[3]{-27}$.

(3) $\sqrt[3]{-2^9}$.