§8.4　冪関数

実数 a 及び自然数 n に対し，a の n 個の積を a の n 乗といい，a^n と書き表しました：

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n\,\text{個の積}}\ ;$$

特に，$n = 0$ のとき[1] は $a^0 = 1$ と約束しました（1.2 節参照）．a^0 , a^1 , a^2 , a^3 , … など，数 a を何個か（0 個以上）掛け合わせた積を a の**冪** (power) といいます． 冪を表す式 a^n において，a を**底**[2] (base) といい，n を**指数** (exponent) といいます．

変数 x の冪 x^1 , x^2 , x^3 , x^4 , … は x の関数です． これらの関数を**冪関数** (power function) といいます． 一般に，定数 n が正の整数のとき，実数 x に x の冪 x^n を対応させる関数を，指数が n である冪関数といいます．

定理 8.4　正の整数 n 及び任意の実数 x について，

$$n\ \text{が奇数のとき}\ (-x)^n = -x^n\ , \qquad n\ \text{が偶数のとき}\ (-x)^n = x^n\ .$$

証明　定理 1.3 より $(-x)^2 = x^2$ ． n が偶数のとき，$n = 2m$ （ m はある自然数）となるので，指数法則より，

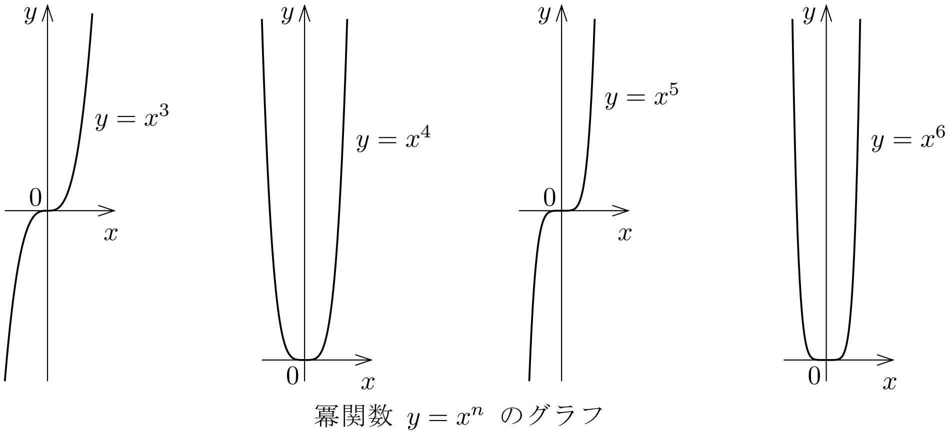
$$\begin{aligned}(-x)^n &= (-x)^{2m} = \{(-x)^2\}^m = (x^2)^m = -x^{2m} \\ &= x^n\ .\end{aligned}$$

n が奇数のとき，$n = 2m+1$ （ m はある自然数） となるので，指数法則より，

$$\begin{aligned}(-x)^n &= (-x)^{2m+1} = (-x)^{2m} \cdot (-x) = -\{(-x)^2\}^m x \\ &= -(x^2)^m x = -x^{2m} x = -x^{2m+1} \\ &= -x^n\ .\end{aligned}$$

（証明終り）

この定理より，正の整数 n を指数とする冪関数 x^n は，n が奇数のとき奇関数で，n が偶数のとき偶関数です． xy 座標平面において，奇関数のグラフは原点に関して対称で，偶関数のグラフは y 軸に関して対称でした（定理 7.8.2）． 従って，正の整数 n を指数とする冪関数 $y = x^n$ のグラフは，n が奇数のとき原点に関して対称で，n が偶数のとき y 軸に関して対称です．



冪関数 $y = x^n$ のグラフ

---

[1] 本書では 0 も自然数に入れました．

[2] ‘てい’ と言います．