

§8.5 冪関数の逆関数

8.3節で述べたように、関数 x^3 には逆関数 $\sqrt[3]{x}$ があります。このように、正の奇数を指数とする冪関数 x^3, x^5, x^7 などには逆関数があります。

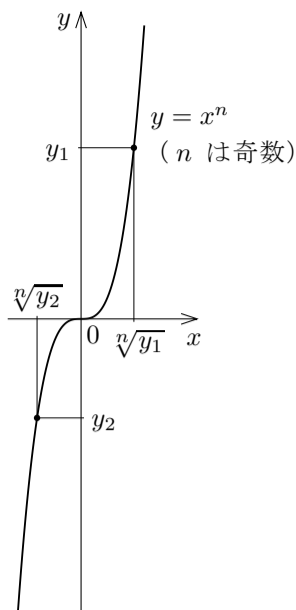
正の奇数 n に対して、実数全体を定義域とする冪関数 x^n を f とおきます： $f(x) = x^n$ 。グラフを見ると分かるように、任意の実数 y に対して $f(x) = y$ となる実数 x が唯一つあります。従って定理 7.6.2 より、関数 f の逆関数 g があります。 f の値域は実数全体ですから、その逆関数 g の定義域は実数全体です。 f の逆関数 g の値 $g(x)$ を $\sqrt[n]{x}$ と書き表します： $g(x) = \sqrt[n]{x}$ 。任意の実数 a について、定理 7.6.1 より、

$$g(f(a)) = a, \quad f(g(a)) = a;$$

$$g(f(a)) = g(a^n) = \sqrt[n]{a^n}, \quad f(g(a)) = f(\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{a}^n$$

なので、

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \quad \sqrt[n]{a}^n = a.$$



8.1節で述べたように、関数 x^2 の定義域が実数全体であるときその逆関数はありませんが、関数 x^2 の定義域を区間 $[0, \infty)$ に制限すると逆関数ができます。同様に、正の偶数を指数とする冪関数 x^4, x^6, x^8 などは、定義域が実数全体であるときその逆関数はありませんが、定義域を区間 $[0, \infty)$ に制限すると逆関数ができます。

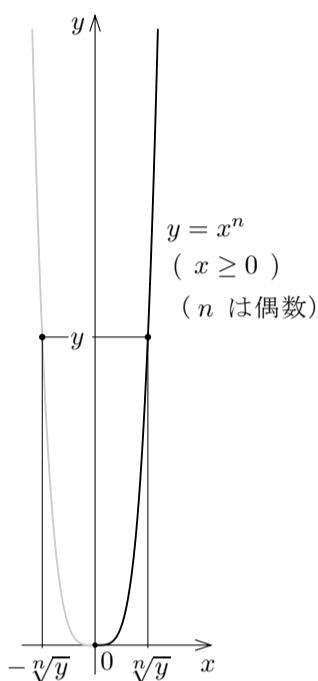
正の偶数 n に対して、区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 x^n を f とおきます： $f(x) = x^n$ ($x \geq 0$)。グラフを見ると分かるように、 $y \geq 0$ である実数 y に対して $f(x) = y$ かつ $x \geq 0$ となる実数 x が唯一つだけあります。従って定理 7.6.2 より、 f の逆関数 g があります。 f の値域は $[0, \infty)$ ですから、その逆関数 g の定義域は $[0, \infty)$ です。 f の逆関数 g の値 $g(x)$ を $\sqrt[n]{x}$ と書き表します： $g(x) = \sqrt[n]{x}$ ($x \geq 0$)。 $a \geq 0$ である任意の実数 a について、定理 7.6.1 より、

$$g(f(a)) = a, \quad f(g(a)) = a;$$

$$g(f(a)) = g(a^n) = \sqrt[n]{a^n}, \quad f(g(a)) = f(\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{a}^n$$

なので、

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \quad \sqrt[n]{a}^n = a.$$



定理 8.5 正の整数 n が奇数のとき、任意の実数 a について、

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \quad \sqrt[n]{a}^n = a.$$

正の整数 n が偶数のとき、 $a \geq 0$ である任意の実数 a について、

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \quad \sqrt[n]{a}^n = a.$$

例題 次の式を計算して簡単にする： $\sqrt[5]{-32}, \sqrt[4]{5}^8$ 。

$$\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2.$$

1.2節で述べた指数法則 $a^{mn} = (a^m)^n$ (m, n は自然数) を用いる：

$$\sqrt[4]{5}^8 = \sqrt[4]{5}^{4 \cdot 2} = (\sqrt[4]{5}^4)^2 = 5^2 = 25.$$

終

問題 8.5 以下の式を計算して簡単にしなさい。

$$(1) \sqrt[4]{81}, \quad (2) \sqrt[5]{-2}^{15}, \quad (3) \sqrt[6]{64}.$$

冪関数 x^1 の逆関数は \sqrt{x} ですから、 $\sqrt{x^1} = x$ ； $x^1 = x$ ですから、結局 $\sqrt{x} = x$ 。つまり、 $\sqrt{\quad}$ は実質的に意味がありません。また、区間 $[0, \infty)$ を定義域とする 2 次関数 x^2 の逆関数は \sqrt{x} です (定理 8.1) から、 $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ 。つまり、 $\sqrt[2]{\quad}$ は $\sqrt{\quad}$ と同じことです。

正の整数 n に対して、記号 $\sqrt[n]{\quad}$ を根号といい、実数 a に対して $\sqrt[n]{a}$ を n 乗根 a ということがあります。 n が偶数であるときは、 $\sqrt[n]{a}$ は $a \geq 0$ のときにのみ意味を持ちます。定理 1.6.5 と似たような定理が成り立ちます (証明は略します)。

定理 任意の正の整数 n および任意の実数 a, b について、 n が偶数であるとき $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ ならば、

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad b \neq 0 \text{ のとき } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

冪根

n を 2 以上の整数とします。複素数 a に対して、 $x^n = a$ となる複素数 x を a の n 乗根といいます。2 乗根のことを平方根といい、3 乗根のことを立方根といいます。実数の範囲で、 n 乗根を考えます。

8.2節で次のことを導きました：

$$\text{任意の実数 } a \text{ と } x \text{ について、 } x^3 = a \text{ ならば } x = \sqrt[3]{a}.$$

一般に、3 以上の奇数 n に対して次のことが成り立ちます：

$$\text{任意の実数 } a \text{ と } x \text{ について、 } x^n = a \text{ ならば } x = \sqrt[n]{a}.$$

従って、 a の実数の n 乗根つまり $x^n = a$ となる実数は、 $\sqrt[n]{a}$ だけです。

実数の 2 乗根つまり平方根について次のようになりました：実数 a について、

$$a \geq 0 \text{ のとき、 } a \text{ の実数の 2 乗根は } \sqrt{a} \text{ と } -\sqrt{a};$$

$$a < 0 \text{ のとき、 } a \text{ の実数の 2 乗根はない。}$$

一般に、正の偶数 n に対して次のようになります：実数 a について、

$$a \geq 0 \text{ のとき、 } a \text{ の実数の } n \text{ 乗根は } \sqrt[n]{a} \text{ と } -\sqrt[n]{a};$$

$$a < 0 \text{ のとき、 } a \text{ の実数の } n \text{ 乗根はない。}$$