

## § 8.8 指数の拡張

冪の指数の範囲を実数全体にまで更に広げます. 例として 3 の  $\sqrt{2}$  乗  $3^{\sqrt{2}}$  を考えます.  $\sqrt{2} = 1.414213562\dots$  ですから, 次のような値を求めていきます:

$$\begin{aligned}3^{1.41} &= 3^{\frac{141}{100}} = 4.70\dots, \\3^{1.414} &= 3^{\frac{1414}{1000}} = 4.727\dots, \\3^{1.4142} &= 3^{\frac{14142}{10000}} = 4.7287\dots, \\3^{1.41421} &= 3^{\frac{141421}{100000}} = 4.72878\dots, \\3^{1.414213} &= 3^{\frac{1414213}{1000000}} = 4.728801\dots, \\3^{1.4142135} &= 3^{\frac{14142135}{10000000}} = 4.7288041\dots, \\3^{1.41421356} &= 3^{\frac{141421356}{100000000}} = 4.72880437\dots, \\3^{1.414213562} &= 3^{\frac{1414213562}{1000000000}} = 4.728804385\dots, \\&\vdots\end{aligned}$$

このように, 指数を  $\sqrt{2} = 1.41421356237\dots$  に近づけていくと, 3 の冪は  $4.7288043878374\dots$  に近づいていきます. このことより,  $3^{\sqrt{2}} = 4.7288043878374\dots$  と考えます<sup>4)</sup>.

このようにして, 任意の正の実数  $a$  と任意の実数  $p$  とに対して  $a$  の  $p$  乗  $a^p$  を定義することができます. そして, 前述の指数法則も指数が実数である場合にそのまま拡張できます.

**定理 (実数指数の指数法則)** 任意の正の実数  $a, b$  及び任意の実数  $p, q$  について,

$$a^p a^q = a^{p+q}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad (a^p)^q = a^{pq};$$

$$(ab)^p = a^p b^p, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

正の数の冪の値はいつも正です.

**定理** 任意の正の実数  $a$  及び任意の実数  $p$  に対して  $a^p > 0$ .

<sup>4)</sup> これは大雑把な話です. 数学的にはもっと厳密な議論が必要ですが, 本書では扱いません.