

§ 8.9 冪関数

定数 p は実数とします。前節で述べたように、任意の正の実数 x に対して x の p 乗 x^p の値が唯一つ定まります。従って、正の実数 x に x の冪 x^p を対応させると、この対応は関数になります。この関数 x^p を、指数が p である**冪関数**といいます。

例えば、変数 x について $x > 0$ のとき、

$$\begin{aligned} x \text{ の関数 } x^{-5} & \text{ は指数が } -5 \text{ である冪関数で、} \\ x \text{ の関数 } x^{\frac{16}{3}} & \text{ は指数が } \frac{16}{3} \text{ である冪関数で、} \\ x \text{ の関数 } x^{\sqrt{7}} & \text{ は指数が } \sqrt{7} \text{ である冪関数です。} \end{aligned}$$

例題 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする冪関数 f の指数が $\frac{2}{3}$ であるとする。 $f(125)$ 、 $f\left(\frac{7}{8}\right)$ の値を求めよ。

冪関数 f の指数が $\frac{2}{3}$ なので、 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

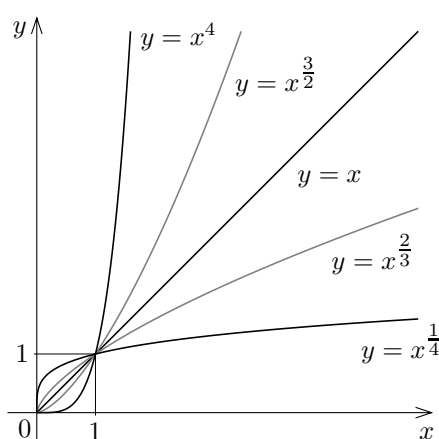
$$\begin{aligned} f(125) &= 125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^2 = 25 . \\ f\left(\frac{7}{8}\right) &= \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{7^{\frac{2}{3}}}{(2^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{7^{\frac{2}{3}}}{2^2} = \frac{7^{\frac{2}{3}}}{4} . \end{aligned}$$

終

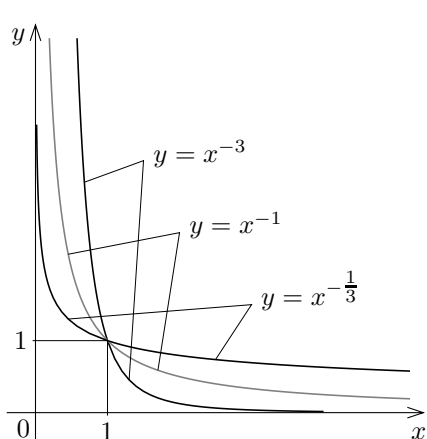
問題 8.9.1 関数 f は $\frac{3}{4}$ を指数とする冪関数であり、その定義域は区間 $[0, \infty)$ であるとする。以下の値を求めなさい。

$$(1) f(81) . \qquad (2) f\left(\frac{11}{16}\right) . \qquad (3) f(49) .$$

定数 p は実数で $p \neq 0$ とします。 $p > 0$ のときの冪関数 x^p ($x \geq 0$) のグラフと $p < 0$ のときの冪関数 x^p ($x > 0$) のグラフとは次のようになります。



$p > 0$ のときの $y = x^p$ のグラフ



$p < 0$ のときの $y = x^p$ のグラフ

グラフから分かるように次の定理が成り立ちます (証明は省略します)。

定理 8.9.1 定数 p は実数で $p \neq 0$ とする。

$p > 0$ のとき、区間 $[0, \infty)$ を定義域とする冪関数 x^p は単調増加である。

$p < 0$ のとき、区間 $(0, \infty)$ を定義域とする冪関数 x^p は単調減少である。

0 以上の実数 x について、 $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ 、 $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ でした。従って、上述の定理 8.9.1 より、区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 \sqrt{x} 、 $\sqrt[3]{x}$ などは単調増加です。

冪関数の逆関数について次の定理が成り立ちます。

定理 8.9.2 定数 p は実数で $p \neq 0$ とする。

(1) $p > 0$ のとき、区間 $[0, \infty)$ を定義域とする冪関数 x^p の逆関数は、 $[0, \infty)$ を定義域とする冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である。

(2) $p < 0$ のとき、区間 $(0, \infty)$ を定義域とする冪関数 x^p の逆関数は、 $(0, \infty)$ を定義域とする冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である。

証明 項 (1) を証明する。 $p > 0$ とする。 $[0, \infty)$ を定義域とする冪関数 f と g とを次のように定める：

$$f(x) = x^p \quad (x \geq 0), \qquad g(x) = x^{\frac{1}{p}} \quad (x \geq 0)$$

f の値域は区間 $[0, \infty)$ であり、 g の定義域と一致する。また、区間 $[0, \infty)$ の任意の実数 u について、指数法則より、

$$g(f(u)) = g(u^p) = (u^p)^{\frac{1}{p}} = u^{p \cdot \frac{1}{p}} = u^1 = u .$$

従って、逆関数の定義より、関数 g は関数 f の逆関数である。 (証明終り)

このように、冪関数の逆関数はやはり冪関数です。

例題 変数 x について $x \geq -\frac{9}{5}$ とする。 x に関する方程式 $(5x+9)^{\frac{3}{4}} = 7$ を解く。

【解説】 $x \geq -\frac{9}{5}$ より $5x+9 \geq 0$. 方程式 $(5x+9)^{\frac{3}{4}} = 7$ の両辺を $\frac{4}{3}$ 乗する：

$$\left\{ (5x+9)^{\frac{3}{4}} \right\}^{\frac{4}{3}} = 7^{\frac{4}{3}} .$$

この等式の左辺は $\left\{ (5x+9)^{\frac{3}{4}} \right\}^{\frac{4}{3}} = (5x+9)^1 = 5x+9$, よって

$$5x+9 = 7^{\frac{4}{3}} ,$$

従って $x = \frac{7^{\frac{4}{3}} - 9}{5}$.

終

問題 8.9.2 変数 x について $x \geq \frac{3}{4}$ とします。 x に関する方程式 $(4x-3)^{\frac{7}{5}} = 9$ を解きなさい。