§8.9　冪関数

定数 p は実数とします．前節で述べたように，任意の正の実数 x に対して x の p 乗 x^p の値が唯一つ定まります．従って，正の実数 x に x の冪 x^p を対応させると，この対応は関数になります．この関数 x^p を，指数が p である**冪関数**といいます．

例えば，変数 x について $x>0$ のとき，

x の関数 x^{-5} は 指数が -5 である冪関数で，
x の関数 $x^{\frac{16}{3}}$ は 指数が $\dfrac{16}{3}$ である冪関数で，
x の関数 $x^{\sqrt{7}}$ は 指数が $\sqrt{7}$ である冪関数です．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $[0,\infty)$ を定義域とする冪関数 f の指数が $\dfrac{2}{3}$ であるとする．$f(125)$，$f\!\left(\dfrac{7}{8}\right)$ の値を求める．

冪関数 f の指数が $\dfrac{2}{3}$ なので，$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ ．

$$f(125)=125^{\frac{2}{3}}=(5^3)^{\frac{2}{3}}=5^2=25\ .$$

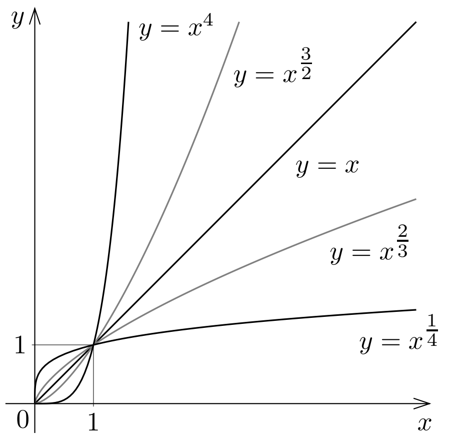
$$f\!\left(\frac{7}{8}\right)=\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{7^{\frac{2}{3}}}{(2^3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{7^{\frac{2}{3}}}{2^2}=\frac{7^{\frac{2}{3}}}{4}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

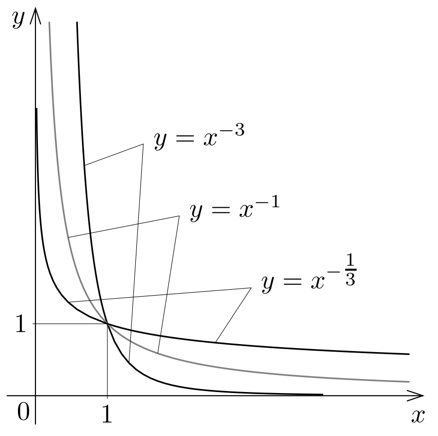
$\boxed{\text{問題 8.9.1}}$　関数 f は $\dfrac{3}{4}$ を指数とする冪関数であり，その定義域は区間 $[0,\infty)$ であるとします．以下の値を求めなさい．

(1) $f(81)$.　　(2) $f\!\left(\dfrac{11}{16}\right)$.　　(3) $f(49)$.

定数 p は実数で $p\neq 0$ とします．$p>0$ のときの冪関数 x^p ($x\geq 0$) のグラフと $p<0$ のときの冪関数 x^p ($x>0$) のグラフとは次のようになります．



$p>0$ のときの $y=x^p$ のグラフ



$p<0$ のときの $y=x^p$ のグラフ

グラフから分かるように次の定理が成り立ちます（証明は省略します）．

定理 8.9.1　定数 p は実数で $p\neq 0$ とする．

$p>0$ のとき，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^p は単調増加である．
$p<0$ のとき，区間 $(0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^p は単調減少である．

0 以上の実数 x について，$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ ，$\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ でした．従って，上述の定理 8.9.1 より，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ などは単調増加です．

冪関数の逆関数について次の定理が成り立ちます．

定理 8.9.2　定数 p は実数で $p\neq 0$ とする．
(1) $p>0$ のとき，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^p の逆関数は，$[0,\infty)$ を定義域とする冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である．
(2) $p<0$ のとき，区間 $(0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^p の逆関数は，$(0,\infty)$ を定義域とする冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である．

証明　項 (1) を証明する．$p>0$ とする．$[0,\infty)$ を定義域とする冪関数 f と g とを次のように定める：

$$f(x)=x^p\quad(\ x\geq 0\ )\ ,\qquad g(x)=x^{\frac{1}{p}}\quad(\ x\geq 0\ )$$

f の値域は区間 $[0,\infty)$ であり，g の定義域と一致する．また，区間 $[0,\infty)$ の任意の実数 u について，指数法則より，

$$g\big(f(u)\big)=g(u^p)=(u^p)^{\frac{1}{p}}=u^{p\frac{1}{p}}=u^1=u\ .$$

従って，逆関数の定義より，関数 g は関数 f の逆関数である．　（証明終り）

このように，冪関数の逆関数はやはり冪関数です．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について $x\geq-\dfrac{9}{5}$ とする．x に関する方程式 $(5x+9)^{\frac{3}{4}}=7$ を解く．

〔解説〕 $x\geq-\dfrac{9}{5}$ より $5x+9\geq 0$ ．方程式 $(5x+9)^{\frac{3}{4}}=7$ の両辺を $\dfrac{4}{3}$ 乗する：

$$\left\{(5x+9)^{\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{4}{3}}=7^{\frac{4}{3}}\ .$$

この等式の左辺は $\left\{(5x+9)^{\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{4}{3}}=(5x+9)^1=5x+9$ ，よって

$$5x+9=7^{\frac{4}{3}}\ ,$$

従って $x=\dfrac{7^{\frac{4}{3}}-9}{5}$ ．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.9.2}}$　変数 x について $x\geq\dfrac{3}{4}$ とします．x に関する方程式 $(4x-3)^{\frac{7}{5}}=9$ を解きなさい．