

第8章の補遺1 実数の立方根

複素数 a に対して、 $x^3 = a$ となる複素数 x を a の3乗根または立方根といいます。

実数 a について、 $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ なので $\sqrt[3]{a}$ は a の立方根です。 a の立方根を総て求めてみます。 複素数 x は実数 a の立方根であるとします。 $x^3 = a$ なので $x^3 - a = 0$. $\sqrt[3]{a^3} = a$ なので、 $x^3 - \sqrt[3]{a^3} = 0$. この等式の左辺を公式 $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ に当てはめて因数分解すると

$$x^3 - \sqrt[3]{a^3} = (x - \sqrt[3]{a})(x^2 + \sqrt[3]{a}x + \sqrt[3]{a^2}) .$$

よって $(x - \sqrt[3]{a})(x^2 + \sqrt[3]{a}x + \sqrt[3]{a^2}) = 0$ なので、

$$x - \sqrt[3]{a} = 0 \text{ または } x^2 + \sqrt[3]{a}x + \sqrt[3]{a^2} = 0 .$$

2次方程式 $x^2 + \sqrt[3]{a}x + \sqrt[3]{a^2} = 0$ を解くと

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\sqrt[3]{a} \pm \sqrt{\sqrt[3]{a^2} - 4\sqrt[3]{a^2}}}{2} = \frac{-\sqrt[3]{a} \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{a^2}}}{2} = \frac{-\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{a}\sqrt{3}i}{2} \\ &= \sqrt[3]{a} \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} . \end{aligned}$$

よって、方程式 $x^3 = a$ を解くと $x = \sqrt[3]{a}$ または $x = \sqrt[3]{a} \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. 故に、実数

a の立方根は、 $\sqrt[3]{a}$ と $\sqrt[3]{a} \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ と $\sqrt[3]{a} \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ との3つです。