第8章の補遺1　実数の立方根

複素数 a に対して， $x^3=a$ となる複素数 x を a の3乗根または立方根といいます.

実数 a について， $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a$ なので $\sqrt[3]{a}$ は a の立方根です． a の立方根を総て求めてみます． 複素数 x は実数 a の立方根であるとします． $x^3=a$ なので $x^3-a=0$ ． $\sqrt[3]{a}^{\,3}=a$ なので， $x^3-\sqrt[3]{a}^{\,3}=0$ ． この等式の左辺を公式 $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ に当てはめて因数分解すると

$$x^3-\sqrt[3]{a}^{\,3}=\left(x-\sqrt[3]{a}\right)\left(x^2+\sqrt[3]{a}\,x+\sqrt[3]{a}^{\,2}\right) .$$

よって $\left(x-\sqrt[3]{a}\right)\left(x^2+\sqrt[3]{a}\,x+\sqrt[3]{a}^{\,2}\right)=0$ なので，

$$x-\sqrt[3]{a}=0 \text{ または } x^2+\sqrt[3]{a}\,x+\sqrt[3]{a}^{\,2}=0 .$$

2次方程式 $x^2+\sqrt[3]{a}\,x+\sqrt[3]{a}^{\,2}=0$ を解くと

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\sqrt[3]{a}\pm\sqrt{\sqrt[3]{a}^{\,2}-4\sqrt[3]{a}^{\,2}}}{2}=\frac{-\sqrt[3]{a}\pm\sqrt{-3\sqrt[3]{a}^{\,2}}}{2}=\frac{-\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{a}\sqrt{3}i}{2} \\ &= \sqrt[3]{a}\,\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} . \end{aligned}$$

よって，方程式 $x^3=a$ を解くと $x=\sqrt[3]{a}$ または $x=\sqrt[3]{a}\,\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ ． 故に，実数 a の立方根は， $\sqrt[3]{a}$ と $\sqrt[3]{a}\,\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ と $\sqrt[3]{a}\,\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ との3つです.