§9.1 指数関数

定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とします．8.8節で述べたように，任意の実数 x に対して a の冪 a^x の値が唯一つ定まります．従って，実数 x に x を指数とする冪 a^x を対応させると，この対応は関数になります．この関数 a^x を，**底** (base) が a の**指数関数** (exponential function) といいます．任意の実数 x に対して指数関数の値 a^x がありますから，指数関数 a^x は実数全体を定義域にすることができます．$a=1$ のときは，任意の実数 x に対して $a^x=1^x=1$ ですから，変数 x の関数 a^x は定数関数です．従って，$a=1$ のときは関数 a^x を指数関数とは考えません．

例えば，実数を表す変数 x について，

x の関数 3^x は 底が 3 の指数関数で，

x の関数 $\left(\dfrac{2}{7}\right)^x$ は 底が $\dfrac{2}{7}$ の指数関数で，

x の関数 $\sqrt{14}^{\,x}$ は 底が $\sqrt{14}$ の指数関数です．

冪関数と指数関数との違いに注意して下さい．冪関数では底が変数で指数が定数であり，指数関数では指数が変数で底が定数です：定数 p と a （ $a>0$, $a\neq 1$ ）とに対して次のようになります：

$$\text{指数が } p \text{ の冪関数は } \overset{\substack{\text{指数が定数}\\ \downarrow}}{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{底が変数}}}{x^p}}\ ,\qquad \text{底が } a \text{ の指数関数は } \overset{\substack{\text{指数が変数}\\ \downarrow}}{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{底が定数}}}{a^x}}\ .$$

以後，特に断りがない限り，指数関数の定義域は実数全体であるとします．

$\boxed{\text{例題}}$ 指数関数 f の底は 9 であるとする．f の値 $f(3)$, $f(-2)$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ を求める．

指数関数 f の底は 9 なので $f(x)=9^x$ ．

$$f(3)=9^3=729\ ,$$
$$f(-2)=9^{-2}=\frac{1}{9^2}=\frac{1}{81}\ ,$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right)=9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^3=27\ .$$

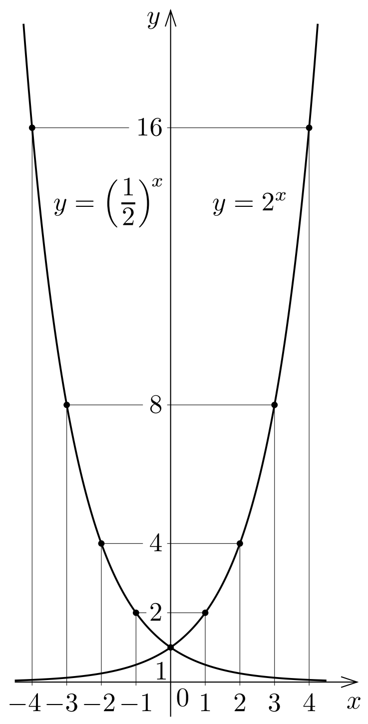
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 9.1}}$ 関数 f は 4 を底とする指数関数であるとします．以下の値を求めなさい．

(1) $f(3)$.　　(2) $f(-2)$.　　(3) $f\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

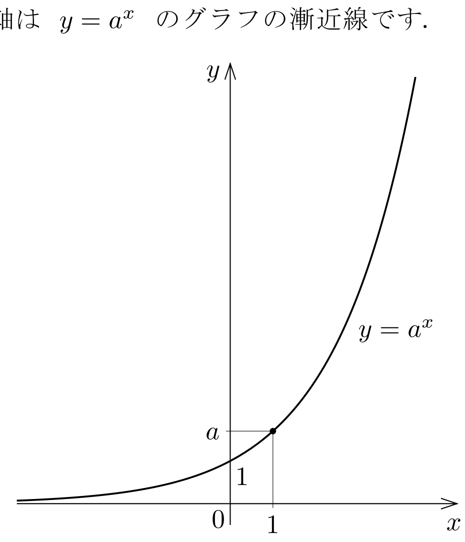
例として，指数関数 2^x と $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ とを考えます．$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\dfrac{1}{2^x}$ です．xy 座標平面において，$y=2^x$ のグラフと $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフとを描いてみます．

x の値	2^x の値	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の値
-4	$\frac{1}{16}=0.0625$	16
-3	$\frac{1}{8}=0.125$	8
-2	$\frac{1}{4}=0.25$	4
-1	$\frac{1}{2}=0.5$	2
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}=0.5$
2	4	$\frac{1}{4}=0.25$
3	8	$\frac{1}{8}=0.125$
4	16	$\frac{1}{16}=0.0625$

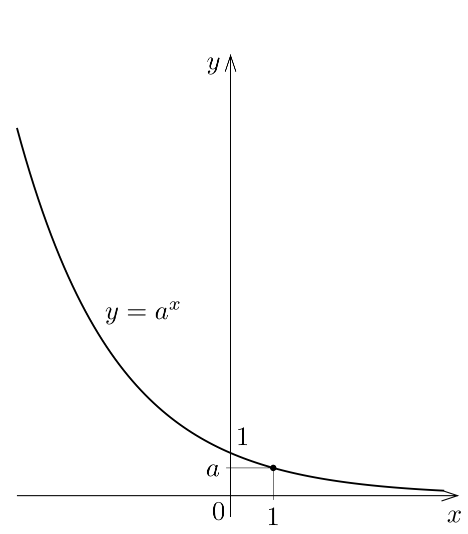


$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $y=2^x$ のグラフと y 軸に関して対称になります．例えば関数 $y=2^x$ について，$x=-3,-4,-5,-6,\dots$ としていくと，$y=2^x=0.125, 0.0625, 0.03125, 0.015625, 0.0078125, \dots$ のように y の値は 0 に近づいていきます．しかし，変数 x の値が何であっても $2^x>0$ ですから，$y=2^x$ のグラフは x 軸と交わることはありません．ですから x 軸は $y=2^x$ のグラフの漸近線です．

定数 a は実数で $a>0$, $a\neq 1$ とします．$a>1$ のときと $0<a<1$ のときに分けて，xy 座標平面において指数関数 $y=a^x$ のグラフを描きます．$a^0=1$, $a^1=a$ ですから，$y=a^x$ のグラフは点 $(0,1)$ と点 $(1,a)$ とを通ります．また，x 軸は $y=a^x$ のグラフの漸近線です．



$a>1$ のときの $y=a^x$ のグラフ



$0<a<1$ のときの $y=a^x$ のグラフ

グラフから分かるように次の定理が成り立ちます（証明は省略します）．

定理 9.1 定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．実数全体を定義域とする指数関数 a^x の値域は区間 $(0,\infty)$ である．また，指数関数 a^x は，$a>1$ のとき単調増加であり，$0<a<1$ のとき単調減少である．