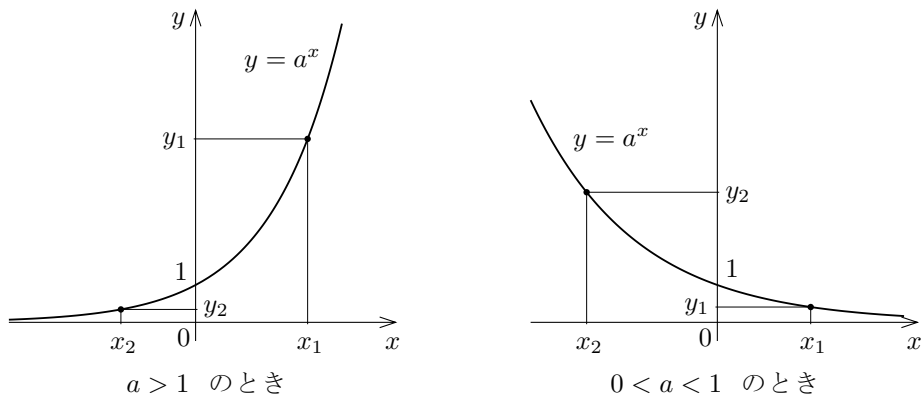


§9.2 対数関数

定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とします. 実数全体を定義域とする指数関数 a^x の値域は正の実数全体 $(0, \infty)$ です (定理 9.1). 指数関数 $y = a^x$ のグラフを見ると分かるように, 次のことが成り立ちます:

正の各実数 y に対して $y = a^x$ となる実数 x が唯一つある.



従って, 定理 7.6.2 より, 指数関数 a^x の逆関数が存在します; その定義域は指数関数 a^x の値域 $(0, \infty)$ です.

定理 定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 実数全体を定義域とする指数関数 a^x の逆関数がある; その定義域は正の実数全体 $(0, \infty)$ である.

定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とします. a を底とする指数関数 a^x の逆関数を, a を底 (base) とする**対数関数** (logarithmic function) といいます. a を底とする対数関数の実数 x に対する値を $\log_a x$ と書き表します.

対数関数 $\log_a x$ は区間 $(0, \infty)$ を定義域にすることができます. 以後, 特に断りが無い限り, 対数関数の定義域は区間 $(0, \infty)$ であるとしします.

実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とします. a を底とする対数関数の正の実数 r に対する値 $\log_a r$ を, a を底とする r の**対数** (logarithm) といいます. また, 対数を表す式 $\log_a r$ において, r を**真数**といます. 対数関数 $\log_a x$ の定義域は区間 $(0, \infty)$ に含まれますから,

対数を表す式 $\log_a r$ の真数 r は正の実数に限る

ことに注意して下さい.

定数 a は実数で $a > 0$, $a \neq 1$ とします. a を底とする指数関数を f とおき, a を底とする対数関数を g とおきます:

$$f(x) = a^x, \quad g(x) = \log_a x \quad (x > 0).$$

対数関数 g は指数関数 f の逆関数ですから, 定理 7.6.1 より, 任意の実数 p 及び任意の正の実数 r について,

$$g(f(p)) = p, \quad f(g(r)) = r;$$

$g(f(p)) = \log_a(a^p)$, $f(g(r)) = a^{\log_a r}$ ですから,

$$\log_a(a^p) = p, \quad a^{\log_a r} = r.$$

このことが指数関数と対数関数との関係の基本になります.

定理 9.2.1 実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする.

任意の実数 p について $\log_a(a^p) = p$.

$r > 0$ である任意の実数 r について $a^{\log_a r} = r$.

例えば次のようになります:

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3; \quad \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2; \quad 3^{\log_3 7} = 7.$$

a は実数で $a > 0$, $a \neq 1$ とします. $1 = a^0$ なので, 定理 9.2.1 より,

$$\log_a 1 = \log_a(a^0) = 0.$$

$a = a^1$ なので, 定理 9.2.1 より,

$$\log_a a = \log_a(a^1) = 1.$$

対数の式 $\log_a(RS)$ を $\log_a RS$ と, $\log_a(R^p)$ を $\log_a R^p$ と略すことがよくあります. 次のことに注意して下さい:

$\log_a RS = \log_a(RS)$ と $(\log_a R)S$ とは全く別の意味であり,

$\log_a R^p = \log_a(R^p)$ と $(\log_a R)^p$ とは全く別の意味である.

また例えば, $\log_a R + S$ は $(\log_a R) + S$ のことです; $\log_a(R + S)$ との違いに注意して下さい.

例題 次の式を計算する: $\log_3 9 + 18$, $\log_2(16 + 48)$.

定理 9.2.1 の公式 $\log_a a^p = p$ ($a > 0$, $a \neq 1$) を用いる.

$$\log_3 9 + 18 = \log_3 3^2 + 18 = 2 + 18 = 20.$$

$$\log_2(16 + 48) = \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6. \quad \text{終}$$

問題 9.2.1 以下の式を計算して簡単にしなさい.

(1) $\log_3(27 + 54)$.

(2) $\log_2 8 + 24$.

例題 次の式を計算して簡単にする: $\log_5 \frac{1}{25}$, $\log_2(8\sqrt{2})$.

定理 9.2.1 の公式 $\log_a a^p = p$ ($a > 0$, $a \neq 1$) 及び指数法則を用いる.

$$\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 \frac{1}{5^2} = \log_5 5^{-2} = -2.$$

$$\log_2(8\sqrt{2}) = \log_2(2^3 2^{\frac{1}{2}}) = \log_2 2^{3+\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2}. \quad \text{終}$$

問題 9.2.2 以下の式を計算して簡単にしなさい.

(1) $\log_2 \frac{1}{32}$.

(2) $\log_3(9\sqrt{3})$.

例題 次の式を計算して簡単にする: $3^{2+\log_3 7}$, $7^{5\log_7 2}$.

定理 9.2.1 の公式 $a^{\log_a r} = r$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $r > 0$) を用いる. 指数法則 $a^{p+q} = a^p a^q$ より,

$$3^{2+\log_3 7} = 3^2 3^{\log_3 7} = 9 \cdot 7 = 63.$$

指数法則 $a^{pq} = (a^p)^q$ より,

$$7^{5\log_7 2} = 7^{(\log_7 2) \cdot 5} = (7^{\log_7 2})^5 = 2^5 = 32. \quad \text{終}$$

問題 9.2.3 以下の式を計算して簡単にしなさい.

(1) $2^{3+\log_2 5}$.

(2) $5^{4\log_5 3}$.

例題 関数 f は 2 を底とする対数関数であるとする. f の値 $f(11)$, $f(16)$, $f(\frac{1}{8})$ を求める.

関数 f は 2 を底とする対数関数なので $f(x) = \log_2 x$.

$$f(11) = \log_2 11,$$

$$f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4,$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 \frac{1}{2^3} = \log_2 2^{-3} = -3. \quad \text{終}$$

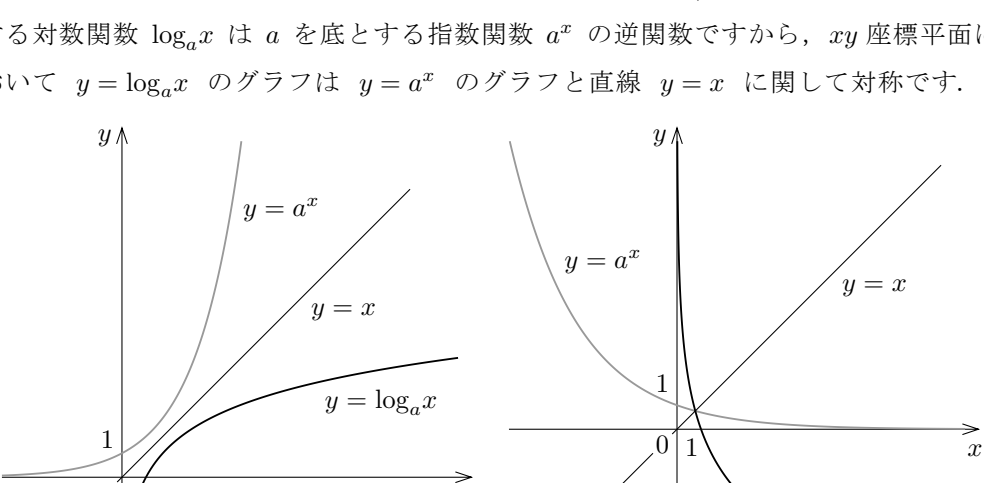
問題 9.2.4 対数関数 g の底は 3 であるとしします. 以下の値を求めなさい.

(1) $g(23)$.

(2) $g(81)$.

(3) $g\left(\frac{1}{27}\right)$.

xy 座標平面において関数 f の逆関数のグラフは f のグラフと直線 $y = x$ に関して対称です (定理 7.7). 定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とします. a を底とする対数関数 $\log_a x$ は a を底とする指数関数 a^x の逆関数ですから, xy 座標平面において $y = \log_a x$ のグラフは $y = a^x$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称です.



$a > 1$ のときの $y = \log_a x$ のグラフ $0 < a < 1$ のときの $y = \log_a x$ のグラフ

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは y 軸に限りなく近付いていきますが, y 軸と交わることはありません. つまり, y 軸は $y = \log_a x$ のグラフの漸近線です.

グラフから分かるように, 次の定理が成り立ちます (証明は省略します).

定理 9.2.2 定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 正の実数の全体を定義域とする対数関数 $\log_a x$ の値域は実数全体である. また, 対数関数 $\log_a x$ は, $a > 1$ のとき単調増加であり, $0 < a < 1$ のとき単調減少である.