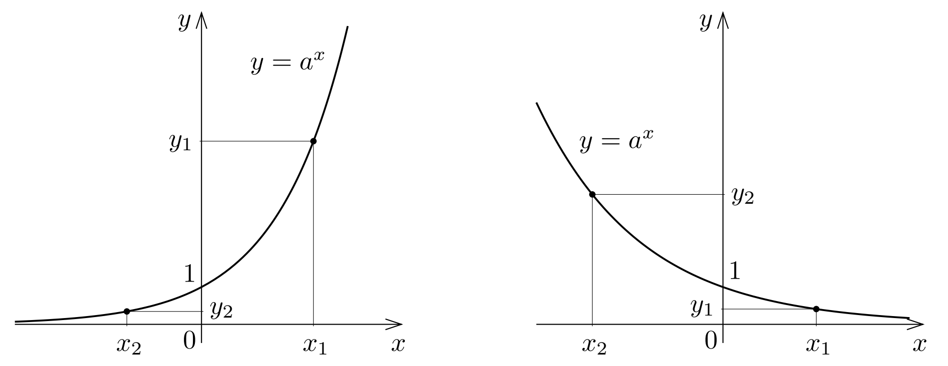
§9.2　対数関数

定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とします．実数全体を定義域とする指数関数 a^x の値域は正の実数全体 $(0,\infty)$ です（定理9.1）．指数関数 $y=a^x$ のグラフを見ると分かるように，次のことが成り立ちます：

正の各実数 y に対して $y=a^x$ となる実数 x が唯1つだけある．



$a>1$ のとき　　　　$0<a<1$ のとき

従って，定理7.6.2より，指数関数 a^x の逆関数が存在します；その定義域は指数関数 a^x の値域 $(0,\infty)$ です．

定理　定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．実数全体を定義域とする指数関数 a^x の逆関数がある；その定義域は正の実数全体 $(0,\infty)$ である．

定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とします．a を底とする指数関数 a^x の逆関数を，a を**底** (base) とする**対数関数** (logarithmic function) といいます．a を底とする対数関数の実数 x に対する値を $\log_a x$ と書き表します．

対数関数 $\log_a x$ は区間 $(0,\infty)$ を定義域にすることができます．以後，特に断りがない限り，対数関数の定義域は区間 $(0,\infty)$ であるとします．

実数 a について $a>0$，$a\neq 1$ とします．a を底とする対数関数の正の実数 r に対する値 $\log_a r$ を，a を底とする r の**対数** (logarithm) といいます．また，対数を表す式 $\log_a r$ において，r を**真数**といいます．対数関数 $\log_a x$ の定義域は区間 $(0,\infty)$ に含まれますから，

対数 $\log_a r$ の真数 r は正の実数に限る

ことに注意して下さい．

定数 a は実数で $a>0$，$a\neq 1$ とします．a を底とする指数関数を f とおき，a を底とする対数関数を g とおきます：

$$f(x)=a^x\ ,\qquad g(x)=\log_a x\quad(\ x>0\ )\ .$$

対数関数 g は指数関数 f の逆関数ですから，定理7.6.1より，任意の実数 p 及び任意の正の実数 r について，

$$g\big(f(p)\big)=p\ ,\qquad f\big(g(r)\big)=r\ ;$$

$g\big(f(p)\big)=\log_a(a^p)$，$f\big(g(r)\big)=a^{\log_a r}$ ですから，

$$\log_a(a^p)=p\ ,\qquad a^{\log_a r}=r\ .$$

このことが指数関数と対数関数との関係の基本になります．

> **定理9.2.1**　実数 a について $a>0$，$a\neq 1$ とする．
> 任意の実数 p について $\log_a(a^p)=p$ ．
> $r>0$ である任意の実数 r について $a^{\log_a r}=r$ ．

例えば次のようになります：

$$\log_2 8=\log_2 2^3=3\ ;\qquad \log_5 25=\log_5 5^2=2\ ;\qquad 3^{\log_3 7}=7\ .$$

a は実数で $a>0$，$a\neq 1$ とします．$1=a^0$ なので，定理9.2.1より，

$$\log_a 1=\log_a(a^0)=0\ .$$

$a=a^1$ なので，定理9.2.1より，

$$\log_a a=\log_a(a^1)=1\ .$$

対数の式 $\log_a(RS)$ を $\log_a RS$ と，$\log_a(R^p)$ を $\log_a R^p$ と略すことがよくあります．次のことに注意して下さい：

$\log_a RS=\log_a(RS)$ と $(\log_a R)S$ とは全く別の意味であり，

$\log_a R^p=\log_a(R^p)$ と $(\log_a R)^p$ とは全く別の意味である．

また例えば，$\log_a R+S$ は $(\log_a R)+S$ のことです；$\log_a(R+S)$ との違いに注意して下さい．

例題　次の式を計算する：$\log_3 9+18$，$\log_2(16+48)$ ．

定理9.2.1の公式 $\log_a a^p=p$（$a>0$，$a\neq 1$）を用いる．

$$\log_3 9+18=\log_3 3^2+18=2+18=20\ .$$
$$\log_2(16+48)=\log_2 64=\log_2 2^6=6\ .$$

終

問題 9.2.1　以下の式を計算して簡単にしなさい．

(1) $\log_3(27+54)$ ．　　(2) $\log_2 8+24$ ．

例題　次の式を計算して簡単にする：$\log_5\dfrac{1}{25}$，$\log_2\big(8\sqrt{2}\big)$ ．

定理9.2.1の公式 $\log_a a^p=p$（$a>0$，$a\neq 1$）及び指数法則を用いる．

$$\log_5\frac{1}{25}=\log_5\frac{1}{5^2}=\log_5 5^{-2}=-2\ .$$

$$\log_2\big(8\sqrt{2}\big)=\log_2\Big(2^3 2^{\frac{1}{2}}\Big)=\log_2 2^{3+\frac{1}{2}}=\log_2 2^{\frac{7}{2}}=\frac{7}{2}\ .$$

終

問題 9.2.2　以下の式を計算して簡単にしなさい．

(1) $\log_2\dfrac{1}{32}$ ．　　(2) $\log_3\big(9\sqrt{3}\big)$ ．

例題　次の式を計算して簡単にする：$3^{2+\log_3 7}$，$7^{5\log_7 2}$ ．

定理9.2.1の公式 $a^{\log_a r}=r$（$a>0$，$a\neq 1$，$r>0$）を用いる．指数法則 $a^{p+q}=a^pa^q$ より，

$$3^{2+\log_3 7}=3^2 3^{\log_3 7}=9\cdot 7=63\ .$$

指数法則 $a^{pq}=(a^p)^q$ より，

$$7^{5\log_7 2}=7^{(\log_7 2)\cdot 5}=\big(7^{\log_7 2}\big)^5=2^5=32\ .$$

終

問題 9.2.3　以下の式を計算して簡単にしなさい．

(1) $2^{3+\log_2 5}$ ．　　(2) $5^{4\log_5 3}$ ．

例題　関数 f は 2 を底とする対数関数であるとする．f の値 $f(11)$，$f(16)$，$f\Big(\dfrac{1}{8}\Big)$ を求める．

関数 f は 2 を底とする対数関数なので $f(x)=\log_2 x$ ．

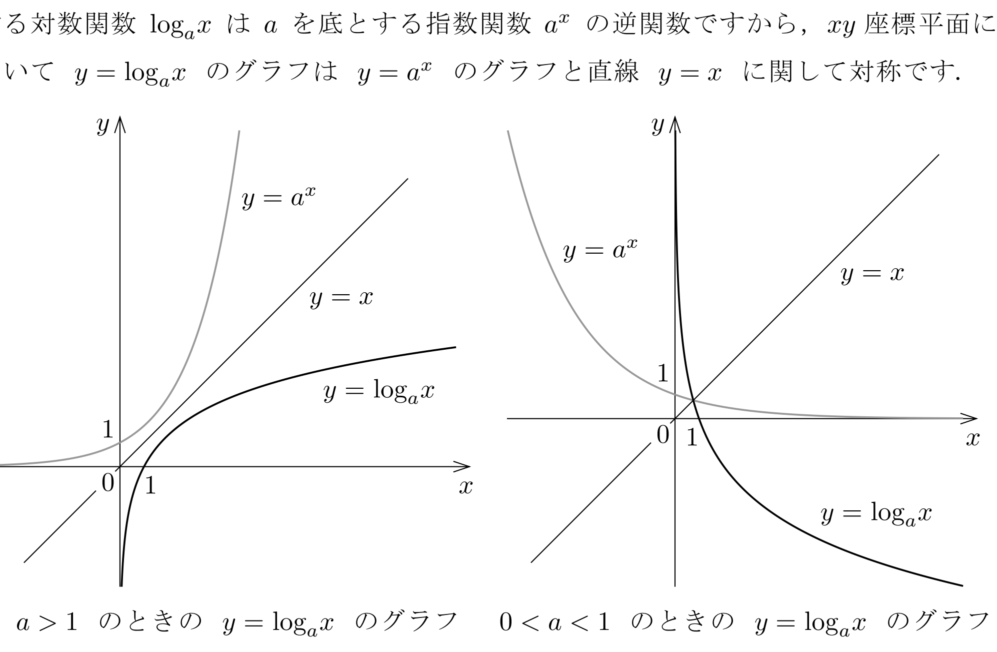
$$f(11)=\log_2 11\ ,$$
$$f(16)=\log_2 16=\log_2 2^4=4\ ,$$
$$f\Big(\frac{1}{8}\Big)=\log_2\frac{1}{8}=\log_2\frac{1}{2^3}=\log_2 2^{-3}=-3\ .$$

終

問題 9.2.4　対数関数 g の底が 3 であるとします．以下の値を求めなさい．

(1) $g(23)$ ．　　(2) $g(81)$ ．　　(3) $g\Big(\dfrac{1}{27}\Big)$ ．

xy 座標平面において関数 f の逆関数のグラフは f のグラフと直線 $y=x$ に関して対称です（定理7.7）．定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とします．a を底とする対数関数 $\log_a x$ は a を底とする指数関数 a^x の逆関数ですから，xy 座標平面において $y=\log_a x$ のグラフは $y=a^x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称です．



$a>1$ のときの $y=\log_a x$ のグラフ　　$0<a<1$ のときの $y=\log_a x$ のグラフ

対数関数 $y=\log_a x$ のグラフは y 軸に限りなく近付いていきますが，y 軸と交わることはありません．つまり，y 軸は $y=\log_a x$ のグラフの漸近線です．

グラフから分かるように，次の定理が成り立ちます（証明は省略します）．

定理9.2.2　定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．正の実数の全体を定義域とする対数関数 $\log_a x$ の値域は実数全体である．また，対数関数 $\log_a x$ は，$a>1$ のとき単調増加であり，$0<a<1$ のとき単調減少である．