

§9.3 対数の性質

指数法則と定理9.2.1とから対数に関する公式を導きます。

定理 9.3 a は正の実数で $a \neq 1$ とする. 任意の正の実数 r, s 及び任意の実数 p について,

$$\log_a(rs) = \log_a r + \log_a s, \quad \log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s, \quad \log_a(r^p) = p \log_a r.$$

証明 等式 $\log_a r + \log_a s = \log_a(rs)$ を導く. 定理9.2.1として述べた公式 $P = \log_a(a^P)$ において $P = \log_a r + \log_a s$ とおく:

$$\log_a r + \log_a s = \log_a(a^{\log_a r + \log_a s}).$$

右辺の式において, 指数法則 $a^{u+v} = a^u a^v$ より

$$a^{\log_a r + \log_a s} = a^{\log_a r} a^{\log_a s},$$

定理9.2.1より $a^{\log_a r} = r$, $a^{\log_a s} = s$ なので

$$a^{\log_a r} a^{\log_a s} = rs.$$

これら3つの等式より,

$$\log_a r + \log_a s = \log_a(a^{\log_a r + \log_a s}) = \log_a(a^{\log_a r} a^{\log_a s}) = \log_a(rs).$$

等式 $\log_a r - \log_a s = \log_a \frac{r}{s}$ を導く. 定理9.2.1として述べた公式 $P = \log_a(a^P)$ において $P = \log_a r - \log_a s$ とおく:

$$\log_a r - \log_a s = \log_a(a^{\log_a r - \log_a s}).$$

右辺の式において, 指数法則 $a^{u-v} = \frac{a^u}{a^v}$ より

$$a^{\log_a r - \log_a s} = \frac{a^{\log_a r}}{a^{\log_a s}},$$

定理9.2.1より $a^{\log_a r} = r$, $a^{\log_a s} = s$ なので

$$\frac{a^{\log_a r}}{a^{\log_a s}} = \frac{r}{s}.$$

これら3つの等式より,

$$\log_a r - \log_a s = \log_a(a^{\log_a r - \log_a s}) = \log_a \frac{a^{\log_a r}}{a^{\log_a s}} = \log_a \frac{r}{s}.$$

等式 $p \log_a r = \log_a(r^p)$ を導く. 定理9.2.1として述べた公式 $P = \log_a(a^P)$ において $P = p \log_a r$ とおく:

$$p \log_a r = \log_a(a^{p \log_a r}).$$

右辺の式において, 指数法則 $a^{vu} = a^{uv} = (a^u)^v$ より

$$a^{p \log_a r} = (a^{\log_a r})^p,$$

定理9.2.1より $a^{\log_a r} = r$ なので

$$(a^{\log_a r})^p = r^p.$$

これら3個の等式より,

$$p \log_a r = \log_a(a^{p \log_a r}) = \log_a\{(a^{\log_a r})^p\} = \log_a(r^p).$$

(証明終り)

a は正の実数で $a \neq 1$ とします. 正の実数 r について,

$$\log_a \frac{1}{r} = \log_a r^{-1} = -\log_a r.$$

例題 次の式を計算して簡単にする: $\log_2 \frac{8}{5} + \log_2 10$.

【解説】 2通りの計算法を示す.

$$\log_2 \frac{8}{5} = \log_2 8 - \log_2 5 = \log_2 2^3 - \log_2 5 = 3 - \log_2 5,$$

$$\log_2 10 = \log_2(2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5.$$

よって

$$\log_2 \frac{8}{5} + \log_2 10 = 3 - \log_2 5 + 1 + \log_2 5 = 4.$$

あるいは,

$$\log_2 \frac{8}{5} + \log_2 10 = \log_2\left(\frac{8}{5} \cdot 10\right) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4. \quad \square$$

問題 9.3.1 次の式を計算して簡単にしなさい: $\log_3 36 + \log_3 \frac{27}{4}$.

例題 次の式を計算して簡単にする: $2 \log_5 8 + \log_5 \frac{3}{32}$.

【解説】 2通りの計算法を示す.

$$2 \log_5 8 + \log_5 \frac{3}{32} = 2 \log_5 2^3 + \log_5 3 - \log_5 32 = 6 \log_5 2 + \log_5 3 - \log_5 2^5$$

$$= 6 \log_5 2 + \log_5 3 - 5 \log_5 2 = \log_5 2 + \log_5 3$$

$$= \log_5 6.$$

あるいは,

$$2 \log_5 8 + \log_5 \frac{3}{32} = \log_5(2^3)^2 + \log_5 \frac{3}{32} = \log_5\left(2^6 \cdot \frac{3}{2^5}\right) = \log_5(2 \cdot 3) = \log_5 6. \quad \square$$

問題 9.3.2 次の式を計算して簡単にしなさい: $\log_6 \frac{27}{7} - 2 \log_6 9$.

例題 次の式を計算して簡単にする: $\frac{\log_2 40}{2} - \log_2 \sqrt{5}$.

$$\frac{\log_2 40}{2} - \log_2 \sqrt{5} = \frac{\log_2(2^3 \cdot 5)}{2} - \log_2 5^{\frac{1}{2}} = \frac{\log_2 2^3 + \log_2 5}{2} - \frac{1}{2} \log_2 5$$

$$= \frac{3 + \log_2 5}{2} - \frac{\log_2 5}{2} = \frac{3}{2}. \quad \square$$

問題 9.3.3 次の式を計算して簡単にしなさい: $\log_5 \sqrt{7} - \frac{\log_5 28}{2}$.

対数に関するもう一つの公式は対数の底を換えるための公式です.

補助定理 実数 a と b について, $a, b > 0$, $b \neq 1$ であるとき, $a \neq 1$ ならば $\log_b a \neq 0$.

証明 $\log_b a = 0$ とすると, $b^{\log_b a} = b^0 = 1$, 定理9.2.1より $b^{\log_b a} = a$ なので, $a = 1$. つまり, $\log_b a = 0$ ならば $a = 1$. 対偶をとると, $a \neq 1$ ならば $\log_b a \neq 0$.

(証明終り)

定理 (対数の底の変換公式) 実数 a, b, r について, $a, b, r > 0$, $a, b \neq 1$ のとき,

$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}.$$

証明 定理9.2.1として述べた公式 $P = \log_b(b^P)$ において $P = (\log_b a)(\log_a r)$ とおく:

$$(\log_b a)(\log_a r) = \log_b\{b^{(\log_b a)(\log_a r)}\}.$$

指数法則 $b^{uv} = (b^u)^v$ より

$$b^{(\log_b a)(\log_a r)} = (b^{\log_b a})^{\log_a r},$$

定理9.2.1より $b^{\log_b a} = a$, $a^{\log_a r} = r$ なので,

$$(b^{\log_b a})^{\log_a r} = a^{\log_a r} = r.$$

これら3つの等式より,

$$(\log_b a)(\log_a r) = \log_b\{b^{(\log_b a)(\log_a r)}\} = \log_b\{(b^{\log_b a})^{\log_a r}\} = \log_b r.$$

$a \neq 1$ なので, 補助定理より $\log_b a \neq 0$, 故に $\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$. (証明終り)

例題 次の式を計算して簡単にする: $\log_8 32, \log_{\frac{1}{4}} 49$. 対数の式を用いるならば底を2にする.

$$\log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3} = \frac{5}{3}.$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 49 = \frac{\log_2 49}{\log_2 \frac{1}{4}} = \frac{\log_2 7^2}{\log_2 2^{-2}} = \frac{2 \log_2 7}{-2} = -\log_2 7. \quad \square$$

問題 9.3.4 以下の式を簡単にしなさい. 対数の式を用いるならば底を2にしなさい.

$$(1) \log_{16} 64.$$

$$(2) \log_{\frac{1}{9}} 27.$$

実数 a と b について, $a, b > 0$, $a, b \neq 1$ であるとき, 底の変換公式より,

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

一つの式に異なる底の対数が現れるときは, 底の変換公式を用いて対数の底を揃えます.

例題 次の式を計算して簡単にする: $\log_3 10 - \log_9 16$. 対数の式を用いるならば底を3にする.

$$\log_3 10 - \log_9 16 = \log_3(2 \cdot 5) - \frac{\log_3 16}{\log_3 9} = \log_3 2 + \log_3 5 - \frac{\log_3 2^4}{\log_3 3^2}$$

$$= \log_3 2 + \log_3 5 - \frac{4 \log_3 2}{2} = \log_3 2 + \log_3 5 - 2 \log_3 2 = \log_3 5 - \log_3 2$$

$$= \log_3 \frac{5}{2}. \quad \square$$

問題 9.3.5 次の式を計算して簡単にしなさい: $\frac{\log_2 21}{3} - \log_8 49$. 対数の式を用いるならば底を2にしなさい.

例題 次の式を計算して簡単にする: $(\log_3 2)(\log_8 6)$. 対数の式を用いるならば底を3にする.

$$(\log_3 2)(\log_8 6) = \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 8} = \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 2^3} = \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 6}{3 \log_3 2}$$

$$= \frac{\log_3 6}{3}. \quad \square$$

問題 9.3.6 次の式を計算して簡単にしなさい: $(\log_2 3)(\log_9 10)$. 対数の式を用いるならば底を2にしなさい.