§9.3　対数の性質

指数法則と定理9.2.1とから対数に関する基本的な4つの公式を導きます.

定理9.3　a は正の実数で $a \neq 1$ とする．任意の正の実数 r, s 及び任意の実数 p について,

$$\log_a(rs) = \log_a r + \log_a s \ , \qquad \log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s \ , \qquad \log_a(r^p) = p\log_a r \ .$$

証明　等式 $\log_a r + \log_a s = \log_a(rs)$ を導く．定理9.2.1として述べた公式 $P = \log_a(a^P)$ において $P = \log_a r + \log_a s$ とおく：

$$\log_a r + \log_a s = \log_a\left(a^{\log_a r + \log_a s}\right) \ .$$

右辺の式において，指数法則 $a^{u+v} = a^u a^v$ より

$$a^{\log_a r + \log_a s} = a^{\log_a r} a^{\log_a s} \ ,$$

定理9.2.1より $a^{\log_a r} = r$, $a^{\log_a s} = s$ なので

$$a^{\log_a r} a^{\log_a s} = rs \ .$$

これら3つの等式より,

$$\log_a r + \log_a s = \log_a\left(a^{\log_a r + \log_a s}\right) = \log_a\left(a^{\log_a r} a^{\log_a s}\right) = \log_a(rs) \ .$$

等式 $\log_a r - \log_a s = \log_a \frac{r}{s}$ を導く．定理9.2.1として述べた公式 $P = \log_a(a^P)$ において $P = \log_a r - \log_a s$ とおく：

$$\log_a r - \log_a s = \log_a\left(a^{\log_a r - \log_a s}\right) \ .$$

右辺の式において，指数法則 $a^{u-v} = \dfrac{a^u}{a^v}$ より

$$a^{\log_a r - \log_a s} = \frac{a^{\log_a r}}{a^{\log_a s}} \ ,$$

定理9.2.1より $a^{\log_a r} = r$, $a^{\log_a s} = s$ なので

$$\frac{a^{\log_a r}}{a^{\log_a s}} = \frac{r}{s} \ .$$

これら3つの等式より,

$$\log_a r - \log_a s = \log_a(a^{\log_a r - \log_a s}) = \log_a \frac{a^{\log_a r}}{a^{\log_a s}} = \log_a \frac{r}{s} \ .$$

等式 $p\log_a r = \log_a(r^p)$ を導く．定理9.2.1として述べた公式 $P = \log_a(a^P)$ において $P = p\log_a r$ とおく：

$$p\log_a r = \log_a\left(a^{p\log_a r}\right) \ .$$

右辺の式において，指数法則 $a^{vu} = a^{uv} = (a^u)^v$ より

$$a^{p\log_a r} = \left(a^{\log_a r}\right)^p \ ,$$

定理9.2.1より $a^{\log_a r} = r$ なので

$$\left(a^{\log_a r}\right)^p = r^p \ .$$

これら3つの等式より,

$$p\log_a r = \log_a\left(a^{p\log_a r}\right) = \log_a\left\{\left(a^{\log_a r}\right)^p\right\} = \log_a(r^p) \ .$$

（証明終り）

a は正の実数で $a \neq 1$ とします．正の実数 r について,

$$\log_a \frac{1}{r} = \log_a r^{-1} = -\log_a r \ .$$

例題　次の式を計算して簡単にする： $\log_2 \frac{8}{5} + \log_2 10$.

〔解説〕 2通りの計算法を示す.

$$\log_2 \frac{8}{5} = \log_2 8 - \log_2 5 = \log_2 2^3 - \log_2 5 = 3 - \log_2 5 \ ,$$
$$\log_2 10 = \log_2(2\cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5 \ .$$

よって

$$\log_2 \frac{8}{5} + \log_2 10 = 3 - \log_2 5 + 1 + \log_2 5 = 4 \ .$$

あるいは,

$$\log_2 \frac{8}{5} + \log_2 10 = \log_2\left(\frac{8}{5}\cdot 10\right) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \ .$$

終

問題 9.3.1　次の式を計算して簡単にしなさい： $\log_3 36 + \log_3 \frac{27}{4}$.

例題　次の式を計算して簡単にする： $2\log_5 8 + \log_5 \frac{3}{32}$.

〔解説〕 2通りの計算法を示す.

$$\begin{aligned} 2\log_5 8 + \log_5 \frac{3}{32} &= 2\log_5 2^3 + \log_5 3 - \log_5 32 = 6\log_5 2 + \log_5 3 - \log_5 2^5 \\ &= 6\log_5 2 + \log_5 3 - 5\log_5 2 = \log_5 2 + \log_5 3 \\ &= \log_5 6 \ . \end{aligned}$$

あるいは,

$$2\log_5 8 + \log_5 \frac{3}{32} = \log_5(2^3)^2 + \log_5 \frac{3}{32} = \log_5\left(2^6 \cdot \frac{3}{2^5}\right) = \log_5(2\cdot 3) = \log_5 6 \ .$$

終

問題 9.3.2　次の式を計算して簡単にしなさい： $\log_6 \frac{27}{7} - 2\log_6 9$.

例題　次の式を計算して簡単にする： $\dfrac{\log_2 40}{2} - \log_2\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} \frac{\log_2 40}{2} - \log_2\sqrt{5} &= \frac{\log_2(2^3\cdot 5)}{2} - \log_2 5^{\frac{1}{2}} = \frac{\log_2 2^3 + \log_2 5}{2} - \frac{1}{2}\log_2 5 \\ &= \frac{3 + \log_2 5}{2} - \frac{\log_2 5}{2} = \frac{3}{2} \ . \end{aligned}$$

終

問題 9.3.3　次の式を計算して簡単にしなさい： $\log_5\sqrt{7} - \dfrac{\log_5 28}{2}$.

対数に関するもう一つの公式は対数の底を換えるための公式です.

補助定理　実数 a と b とについて， $a, b > 0$, $b \neq 1$ であるとき， $a \neq 1$ ならば $\log_b a \neq 0$.

証明　$\log_b a = 0$ とすると， $b^{\log_b a} = b^0 = 1$ ，定理9.2.1より $b^{\log_b a} = a$ なので， $a = 1$ ．つまり， $\log_b a = 0$ ならば $a = 1$ ．対偶をとると， $a \neq 1$ ならば $\log_b a \neq 0$.　（証明終り）

定理（対数の底の変換公式）　実数 a, b, r について， $a, b, r > 0$, $a, b \neq 1$ のとき,

$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a} \ .$$

証明　定理9.2.1として述べた公式 $P = \log_b(b^P)$ において $P = (\log_b a)(\log_a r)$ とおく：

$$(\log_b a)(\log_a r) = \log_b\left\{b^{(\log_b a)(\log_a r)}\right\} \ .$$

指数法則 $b^{uv} = (b^u)^v$ より

$$b^{(\log_b a)(\log_a r)} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a r} \ ,$$

定理9.2.1より $b^{\log_b a} = a$, $a^{\log_a r} = r$ なので,

$$\left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a r} = a^{\log_a r} = r \ .$$

これら3つの等式より,

$$(\log_b a)(\log_a r) = \log_b\left\{b^{(\log_b a)(\log_a r)}\right\} = \log_b\left\{\left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a r}\right\} = \log_b r \ .$$

$a \neq 1$ なので，補助定理より $\log_b a \neq 0$ ，故に $\log_a r = \dfrac{\log_b r}{\log_b a}$.　（証明終り）

例題　次の式を計算して簡単にする： $\log_8 32$, $\log_{\frac{1}{4}} 49$ ．対数の式を用いるならば底を 2 にする.

$$\log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3} = \frac{5}{3} \ .$$
$$\log_{\frac{1}{4}} 49 = \frac{\log_2 49}{\log_2 \frac{1}{4}} = \frac{\log_2 7^2}{\log_2 \frac{1}{2^2}} = \frac{2\log_2 7}{\log_2 2^{-2}} = \frac{2\log_2 7}{-2} = -\log_2 7 \ .$$

終

問題 9.3.4　以下の式を簡単にしなさい．対数の式を用いるならば底を 2 にしなさい.

(1) $\log_{16} 64$.　　(2) $\log_{\frac{1}{9}} 27$.

実数 a と b とについて， $a, b > 0$, $a, b \neq 1$ であるとき，底の変換公式より,

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \ .$$

一つの式に異なる底の対数が現れるときは，底の変換公式を用いて対数の底を揃えます.

例題　次の式を計算して簡単にする： $\log_3 10 - \log_9 16$ ．対数の式を用いるならば底を 3 にする.

$$\begin{aligned} \log_3 10 - \log_9 16 &= \log_3(2\cdot 5) - \frac{\log_3 16}{\log_3 9} = \log_3 2 + \log_3 5 - \frac{\log_3 2^4}{\log_3 3^2} \\ &= \log_3 2 + \log_3 5 - \frac{4\log_3 2}{2} = \log_3 2 + \log_3 5 - 2\log_3 2 = \log_3 5 - \log_3 2 \\ &= \log_3 \frac{5}{2} \ . \end{aligned}$$

終

問題 9.3.5　次の式を計算して簡単にしなさい： $\dfrac{\log_2 21}{3} - \log_8 49$ ．対数の式を用いるならば底を 2 にしなさい.

例題　次の式を計算して簡単にする： $(\log_3 2)(\log_8 6)$ ．対数の式を用いるならば底を 3 にする.

$$\begin{aligned} (\log_3 2)(\log_8 6) &= \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 8} = \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 2^3} = \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 6}{3\log_3 2} \\ &= \frac{\log_3 6}{3} \ . \end{aligned}$$

終

問題 9.3.6　次の式を計算して簡単にしなさい： $(\log_2 3)(\log_9 10)$ ．対数の式を用いるならば底を 2 にしなさい.