

§9.4 指数・対数に関する方程式

実数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とします. 実数 r, s について $r, s > 0$ とします. 関数の性質より,

$$r = s \text{ ならば } \log_a r = \log_a s .$$

逆に, $\log_a r = \log_a s$ とすると,

$$a^{\log_a r} = a^{\log_a s} ,$$

ここで定理9.2.1より $a^{\log_a r} = r$, $a^{\log_a s} = s$ なので, $r = s$. 従って,

$$\log_a r = \log_a s \text{ ならば } r = s .$$

こうして次のことが分かります.

定理 9.4 実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする. $r > 0$, $s > 0$ である任意の実数 r と s について,

$$r = s \iff \log_a r = \log_a s .$$

例解 変数 x に関する方程式 $5^{x-2} = 7$ を解きます. $5^{x-2} = 7 > 0$ なので, 定理9.4より,

$$5^{x-2} = 7 \iff \log_5 5^{x-2} = \log_5 7 ;$$

定理9.2.1より $\log_5 5^{x-2} = x-2$ なので,

$$\log_5 5^{x-2} = \log_5 7 \iff x-2 = \log_5 7 \iff x = 2 + \log_5 7 .$$

従って

$$5^{x-2} = 7 \iff x = 2 + \log_5 7 .$$

つまり, 方程式 $5^{x-2} = 7$ を解くと $x = 2 + \log_5 7$. 終

例題 変数 y に関する方程式 $3^{2y-5} = 75$ を解く.

【方針】 3 を底とする対数をとる.

【解説】 $3^{2y-5} = 75 > 0$ なので

$$\log_3 3^{2y-5} = \log_3 75 .$$

この方程式の左辺は $\log_3 3^{2y-5} = 2y-5$ なので,

$$2y-5 = \log_3 75 ,$$

$$2y = 5 + \log_3 75 ,$$

よって $y = \frac{5 + \log_3 75}{2}$. 更に

$$\frac{5 + \log_3 75}{2} = \frac{5 + \log_3 (3 \cdot 5^2)}{2} = \frac{5 + 1 + 2 \log_3 5}{2} = 3 + \log_3 5 .$$

故に与えられた方程式を解くと $y = 3 + \log_3 5$. 終

問題 9.4.1 変数 y に関する方程式 $5^{3y-5} = 40$ を解きなさい.

方程式の中に未知数 x を含む式 $f(x)$ を真数とする対数の式 $\log_a f(x)$ が現れるとき, 次のことに注意して下さい:

対数の式 $\log_a f(x)$ の真数 $f(x)$ は正である;

従って, その方程式が成り立つためには $f(x) > 0$ でなければなりません. このことを真数条件といいます.

例解 変数 x に関する方程式 $\log_2 (3x+1) = 4$ を解きます. まず, 対数の式 $\log_2 (3x+1)$ の真数は正なので $3x+1 > 0$. 定理9.2.1より $4 = \log_2 2^4 = \log_2 16$ なので,

$$\log_2 (3x+1) = 4 \iff \log_2 (3x+1) = \log_2 16 ,$$

定理9.4より,

$$\log_2 (3x+1) = \log_2 16 \iff 3x+1 = 16 \iff x = 5 .$$

$x = 5$ ⁶⁾ のとき $3x+1 > 0$. 故に与えられた方程式を解くと $x = 5$. 終

例題 変数 k に関する方程式 $2 \log_9 (4k-5) = 1$ を解く.

【注意】 まず対数の式の真数が正になる条件 (真数条件) を考える.

【方針】 両辺が 9 を底とする一つの対数の式になるように変形する.

【解説】 対数の式の真数は正なので $4k-5 > 0$. 方程式 $2 \log_9 (4k-5) = 1$ より

$$\log_9 (4k-5) = \frac{1}{2} .$$

この方程式の右辺は $\frac{1}{2} = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \log_9 (3^2)^{\frac{1}{2}} = \log_9 3$ なので,

$$\log_9 (4k-5) = \log_9 3 ,$$

$$4k-5 = 3 ,$$

$$k = 2 .$$

$k = 2$ のとき $4k-5 > 0$ ⁷⁾. 故に与えられた方程式を解くと $k = 2$. 終

問題 9.4.2 変数 a に関する方程式 $2 \log_4 (5a-7) = 3$ を解きなさい.

例題 変数 x に関する方程式 $\log_4 (x+1) + \log_4 (x-5) = 2$ を解く.

【注意】 まず対数の式の真数が正になる条件 (真数条件) を考える.

【方針】 両辺が 4 を底とする一つの対数の式になるように変形する.

【解説】 対数の式の真数は正なので,

$$x+1 > 0 \text{ かつ } x-5 > 0 .$$

このとき, 方程式 $\log_4 (x+1) + \log_4 (x-5) = 2$ の左辺は

$$\log_4 (x+1) + \log_4 (x-5) = \log_4 \{ (x+1)(x-5) \} ,$$

右辺は $2 = \log_4 4^2 = \log_4 16$ なので,

$$\log_4 \{ (x+1)(x-5) \} = \log_4 16 ,$$

$$(x+1)(x-5) = 16 ,$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0 ,$$

$$(x+3)(x-7) = 0 ,$$

$$x = 7 \text{ または } x = -3 .$$

$x = 7$ のとき, $x+1 = 8 > 0$ かつ $x-5 = 2 > 0$. $x = -3$ のとき, $x+1 \ngtr 0$. 故に与えられた方程式を解くと $x = 7$. 終

問題 9.4.3 変数 x に関する方程式 $\log_3 (x+5) + \log_3 (x-3) = 2$ を解きなさい.

⁶⁾ この例解では, 等式 $x = 5$ を導く途中で $3x+1 = 16$ となっているので, 真数条件 $3x+1 > 0$ は必然的に成り立ちます; ですから真数条件を別途考える必要は実はありません.

⁷⁾ この例題では, 等式 $k = 2$ を導く途中で $4k-5 = 3$ となっているので, 真数条件 $4k-5 > 0$ は必然的に成り立ちます; ですから真数条件を別途考える必要は実はありません.