§9.4　指数・対数に関する方程式

実数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とします．実数 r,s について $r,s>0$ とします．関数の性質より，

$$r=s \text{ ならば } \log_a r=\log_a s \ .$$

逆に，$\log_a r=\log_a s$ とすると，

$$a^{\log_a r}=a^{\log_a s} \ ,$$

ここで定理 9.2.1 より $a^{\log_a r}=r$，$a^{\log_a s}=s$ なので，$r=s$．従って，

$$\log_a r=\log_a s \text{ ならば } r=s \ .$$

こうして次のことが分かります．

定理 9.4　実数 a について $a>0$，$a\neq 1$ とする．$r>0$，$s>0$ である任意の実数 r と s とについて，

$$r=s \iff \log_a r=\log_a s \ .$$

例解　変数 x に関する方程式 $5^{x-2}=7$ を解きます．$5^{x-2}=7>0$ なので，定理 9.4 より，

$$5^{x-2}=7 \iff \log_5 5^{x-2}=\log_5 7 \ ;$$

定理 9.2.1 より $\log_5 5^{x-2}=x-2$ なので，

$$\log_5 5^{x-2}=\log_5 7 \iff x-2=\log_5 7 \iff x=2+\log_5 7 \ .$$

従って

$$5^{x-2}=7 \iff x=2+\log_5 7 \ .$$

つまり，方程式 $5^{x-2}=7$ を解くと $x=2+\log_5 7$．　終

例題　変数 y に関する方程式 $3^{2y-5}=75$ を解く．

〔方針〕 3 を底とする対数をとる．

〔解説〕 $3^{2y-5}=75>0$ なので

$$\log_3 3^{2y-5}=\log_3 75 \ .$$

この方程式の左辺は $\log_3 3^{2y-5}=2y-5$ なので，

$$2y-5=\log_3 75 \ ,$$
$$2y=5+\log_3 75 \ ,$$

よって $y=\dfrac{5+\log_3 75}{2}$．更に

$$\frac{5+\log_3 75}{2}=\frac{5+\log_3(3\cdot 5^2)}{2}=\frac{5+1+2\log_3 5}{2}=3+\log_3 5 \ .$$

故に与えられた方程式を解くと $y=3+\log_3 5$．　終

問題 9.4.1　変数 y に関する方程式 $5^{3y-5}=40$ を解きなさい．

方程式の中に未知数 x を含む式 $f(x)$ を真数とする対数の式 $\log_a f(x)$ が現れるとき，次のことに注意して下さい：

対数の式 $\log_a f(x)$ の真数 $f(x)$ は正である；

従って，その方程式が成り立つためには $f(x)>0$ でなければなりません．このことを真数条件といいます．

例解　変数 x に関する方程式 $\log_2(3x+1)=4$ を解きます．まず，対数の式 $\log_2(3x+1)$ の真数は正なので $3x+1>0$．定理 9.2.1 より $4=\log_2 2^4=\log_2 16$ なので，

$$\log_2(3x+1)=4 \iff \log_2(3x+1)=\log_2 16 \ ,$$

定理 9.4 より，

$$\log_2(3x+1)=\log_2 16 \iff 3x+1=16 \iff x=5 \ .$$

$x=5$ [6] のとき $3x+1>0$．故に与えられた方程式を解くと $x=5$．　終

例題　変数 k に関する方程式 $2\log_9(4k-5)=1$ を解く．

〔注意〕 まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える．

〔方針〕 両辺が 9 を底とする一つの対数の式になるように変形する．

〔解説〕 対数の式の真数は正なので $4k-5>0$．方程式 $2\log_9(4k-5)=1$ より

$$\log_9(4k-5)=\frac{1}{2} \ .$$

この方程式の右辺は $\frac{1}{2}=\log_9 9^{\frac{1}{2}}=\log_9(3^2)^{\frac{1}{2}}=\log_9 3$ なので，

$$\log_9(4k-5)=\log_9 3 \ ,$$
$$4k-5=3 \ ,$$
$$k=2 \ .$$

$k=2$ のとき $4k-5>0$ [7]．故に与えられた方程式を解くと $k=2$．　終

問題 9.4.2　変数 a に関する方程式 $2\log_4(5a-7)=3$ を解きなさい．

例題　変数 x に関する方程式 $\log_4(x+1)+\log_4(x-5)=2$ を解く．

〔注意〕 まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える．

〔方針〕 両辺が 4 を底とする一つの対数の式になるように変形する．

〔解説〕 対数の式の真数は正なので，

$$x+1>0 \text{ かつ } x-5>0 \ .$$

このとき，方程式 $\log_4(x+1)+\log_4(x-5)=2$ の左辺は

$$\log_4(x+1)+\log_4(x-5)=\log_4\{(x+1)(x-5)\} \ ,$$

右辺は $2=\log_4 4^2=\log_4 16$ なので，

$$\log_4\{(x+1)(x-5)\}=\log_4 16 \ ,$$
$$(x+1)(x-5)=16 \ ,$$
$$x^2-4x-21=0 \ ,$$
$$(x+3)(x-7)=0 \ ,$$
$$x=7 \text{ または } x=-3 \ .$$

$x=7$ のとき，$x+1=8>0$ かつ $x-5=2>0$．$x=-3$ のとき，$x+1\not>0$．故に与えられた方程式を解くと $x=7$．　終

問題 9.4.3　変数 x に関する方程式 $\log_3(x+5)+\log_3(x-3)=2$ を解きなさい．

---

[6] この例解では，等式 $x=5$ を導く途中で $3x+1=16$ となっているので，真数条件 $3x+1>0$ は必然的に成り立ちます；ですから真数条件を別途考える必要は実はありません．

[7] この例題では，等式 $k=2$ を導く途中で $4k-5=3$ となっているので，真数条件 $4k-5>0$ は必然的に成り立ちます；ですから真数条件を別途考える必要は実はありません．