

## §9.4 指数・対数に関する方程式

実数  $a$  について  $a > 0$  かつ  $a \neq 1$  とします. 実数  $r, s$  について  $r, s > 0$  とします. 関数の性質より,

$$r = s \text{ ならば } \log_a r = \log_a s .$$

逆に,  $\log_a r = \log_a s$  とすると,

$$a^{\log_a r} = a^{\log_a s} ,$$

ここで定理9.2.1より  $a^{\log_a r} = r$ ,  $a^{\log_a s} = s$  なので,  $r = s$ . 従って,

$$\log_a r = \log_a s \text{ ならば } r = s .$$

こうして次のことが分かります.

**定理 9.4** 実数  $a$  について  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  とする.  $r > 0$ ,  $s > 0$  である任意の実数  $r$  と  $s$  とについて,

$$r = s \iff \log_a r = \log_a s .$$

**例解** 変数  $x$  に関する方程式  $5^{x-2} = 7$  を解きます.  $5^{x-2} = 7 > 0$  なので, 定理9.4より,

$$5^{x-2} = 7 \iff \log_5 5^{x-2} = \log_5 7 ;$$

定理9.2.1より  $\log_5 5^{x-2} = x-2$  なので,

$$\log_5 5^{x-2} = \log_5 7 \iff x-2 = \log_5 7 \iff x = 2 + \log_5 7 .$$

従って

$$5^{x-2} = 7 \iff x = 2 + \log_5 7 .$$

つまり, 方程式  $5^{x-2} = 7$  を解くと  $x = 2 + \log_5 7$ . 終

**例題** 変数  $y$  に関する方程式  $3^{2y-5} = 75$  を解く.

【方針】 3 を底とする対数を考える.

【解説】  $3^{2y-5} = 75 > 0$  なので

$$\log_3 3^{2y-5} = \log_3 75 .$$

この方程式の左辺は  $\log_3 3^{2y-5} = 2y-5$  なので,

$$2y-5 = \log_3 75 ,$$

$$2y = 5 + \log_3 75 ,$$

よって  $y = \frac{5 + \log_3 75}{2}$ . 更に

$$\frac{5 + \log_3 75}{2} = \frac{5 + \log_3 (3 \cdot 5^2)}{2} = \frac{5 + 1 + 2 \log_3 5}{2} = 3 + \log_3 5 .$$

故に与えられた方程式を解くと  $y = 3 + \log_3 5$ . 終

**問題 9.4.1** 変数  $y$  に関する方程式  $5^{3y-5} = 40$  を解きなさい.

方程式の中に未知数  $x$  を含む式  $f(x)$  を真数とする対数の式  $\log_a f(x)$  が現れるとき, 次のことに注意して下さい:

対数の式  $\log_a f(x)$  の真数  $f(x)$  は正である;

従って, その方程式が成り立つためには  $f(x) > 0$  でなければなりません. このことを真数条件といいます.

**例解** 変数  $x$  に関する方程式  $\log_2(3x+1) = 4$  を解きます. まず, 対数の式  $\log_2(3x+1)$  の真数は正なので  $3x+1 > 0$ . 定理9.2.1より  $4 = \log_2 2^4 = \log_2 16$  なので,

$$\log_2(3x+1) = 4 \iff \log_2(3x+1) = \log_2 16 ,$$

定理9.4より,

$$\log_2(3x+1) = \log_2 16 \iff 3x+1 = 16 \iff x = 5 .$$

$x = 5$ <sup>6)</sup> のとき  $3x+1 > 0$ . 故に与えられた方程式を解くと  $x = 5$ . 終

**例題** 変数  $k$  に関する方程式  $2 \log_9(4k-5) = 1$  を解く.

【注意】 まず対数の式の真数が正になる条件 (真数条件) を考える.

【方針】 両辺が 9 を底とする一つの対数の式になるように変形する.

【解説】 対数の式の真数は正なので  $4k-5 > 0$ . 方程式  $2 \log_9(4k-5) = 1$  より

$$\log_9(4k-5) = \frac{1}{2} .$$

この方程式の右辺は  $\frac{1}{2} = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \log_9 (3^2)^{\frac{1}{2}} = \log_9 3$  なので,

$$\log_9(4k-5) = \log_9 3 ,$$

$$4k-5 = 3 ,$$

$$k = 2 .$$

$k = 2$  のとき  $4k-5 > 0$ <sup>7)</sup>. 故に与えられた方程式を解くと  $k = 2$ . 終

**問題 9.4.2** 変数  $a$  に関する方程式  $2 \log_4(5a-7) = 3$  を解きなさい.

**例題** 変数  $x$  に関する方程式  $\log_4(x+1) + \log_4(x-5) = 2$  を解く.

【注意】 まず対数の式の真数が正になる条件 (真数条件) を考える.

【方針】 両辺が 4 を底とする一つの対数の式になるように変形する.

【解説】 対数の式の真数は正なので,

$$x+1 > 0 \text{ かつ } x-5 > 0 .$$

このとき, 方程式  $\log_4(x+1) + \log_4(x-5) = 2$  の左辺は

$$\log_4(x+1) + \log_4(x-5) = \log_4\{(x+1)(x-5)\} ,$$

右辺は  $2 = \log_4 4^2 = \log_4 16$  なので,

$$\log_4\{(x+1)(x-5)\} = \log_4 16 ,$$

$$(x+1)(x-5) = 16 ,$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0 ,$$

$$(x+3)(x-7) = 0 ,$$

$$x = 7 \text{ または } x = -3 .$$

$x = 7$  のとき,  $x+1 = 8 > 0$  かつ  $x-5 = 2 > 0$ .  $x = -3$  のとき,  $x+1 \ngtr 0$ . 故に与えられた方程式を解くと  $x = 7$ . 終

**問題 9.4.3** 変数  $x$  に関する方程式  $\log_3(x+5) + \log_3(x-3) = 2$  を解きなさい.

<sup>6)</sup> この例解では, 等式  $x = 5$  を導く途中で  $3x+1 = 16$  となっているので, 真数条件  $3x+1 > 0$  は必然的に成り立ちます; ですから真数条件を別途考える必要は実はありません.

<sup>7)</sup> この例題では, 等式  $k = 2$  を導く途中で  $4k-5 = 3$  となっているので, 真数条件  $4k-5 > 0$  は必然的に成り立ちます; ですから真数条件を別途考える必要は実はありません.