

## §9.5 指数・対数に関する不等式

定理9.1と定理9.2.2とを思い起こして下さい：定数  $a$  について、

- $a > 1$  のとき指数関数  $a^x$  も対数関数  $\log_a x$  も単調増加であり、
- $0 < a < 1$  のとき指数関数  $a^x$  も対数関数  $\log_a x$  も単調減少である。

実数  $a$  について  $a > 1$  とします。実数  $r, s$  について  $r, s > 0$  とします。対数関数  $\log_a x$  は単調増加ですから、

$$r < s \text{ ならば } \log_a r < \log_a s .$$

また、指数関数  $a^x$  は単調増加ですから、

$$\log_a r < \log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r} < a^{\log_a s} ;$$

定理9.2.1より  $a^{\log_a r} = r$  ,  $a^{\log_a s} = s$  ですから、

$$\log_a r < \log_a s \text{ ならば } r < s .$$

こうして次のことが導かれます：

$$r < s \iff \log_a r < \log_a s .$$

実数  $a$  について  $0 < a < 1$  とします。実数  $r, s$  について  $r, s > 0$  とします。対数関数  $\log_a x$  は単調減少ですから、

$$r < s \text{ ならば } \log_a r > \log_a s .$$

また、指数関数  $a^x$  は単調減少ですから、

$$\log_a s < \log_a r \text{ ならば } a^{\log_a s} > a^{\log_a r} ;$$

定理9.2.1より  $a^{\log_a r} = r$  ,  $a^{\log_a s} = s$  ですから、

$$\log_a s < \log_a r \text{ ならば } s > r .$$

こうして次のことが導かれました：

$$r < s \iff \log_a r > \log_a s .$$

このようにして次の定理が導かれます。

**定理9.5** 実数  $a$  について  $a > 0$  ,  $a \neq 1$  とする。

(1)  $a > 1$  のとき、正の任意の実数  $r$  と  $s$  について、

$$r < s \iff \log_a r < \log_a s ,$$

$$r \leq s \iff \log_a r \leq \log_a s ;$$

(2)  $0 < a < 1$  のとき、正の任意の実数  $r$  と  $s$  について、

$$r < s \iff \log_a r > \log_a s ,$$

$$r \leq s \iff \log_a r \geq \log_a s .$$

**例解** 変数  $x$  に関する不等式  $2^{x-5} < 7$  を解きます。  $0 < 2^{x-5} < 7$  なので、定理9.5より、

$$2^{x-5} < 7 \iff \log_2 2^{x-5} < \log_2 7 ,$$

定理9.2.1より  $\log_2 2^{x-5} = x-5$  なので

$$\log_2 2^{x-5} < 7 \iff x-5 < \log_2 7 \iff x < 5 + \log_2 7 ;$$

従って

$$2^{x-5} = 7 \iff x = 5 + \log_2 7 .$$

つまり、不等式  $2^{x-5} < 7$  を解くと  $x < 5 + \log_2 7$  . 終

**例題** 変数  $x$  に関する不等式  $7^{2x-5} \leq 63$  を解く。

【方針】 7を底とする対数をとる。

【解説】  $0 < 7^{2x-5} \leq 63$  なので

$$\log_7 7^{2x-5} \leq \log_7 63 .$$

この不等式の左辺は  $\log_7 7^{2x-5} = 2x-5$  なので、

$$2x-5 \leq \log_7 63 ,$$

$$2x \leq 5 + \log_7 63 ,$$

よって  $x \leq \frac{5 + \log_7 63}{2}$  . 更にこの右辺は

$$\frac{5 + \log_7 63}{2} = \frac{5 + \log_7 (7 \cdot 3^2)}{2} = \frac{5 + 1 + 2\log_7 3}{2} = 3 + \log_7 3 .$$

故に  $x \leq 3 + \log_7 3$  . 終

**問題9.5.1** 変数  $x$  に関する不等式  $5^{2x-4} < 45$  を解きなさい。

不等式の中に記号  $x$  を含む式  $f(x)$  を真数とする対数の式  $\log_a f(x)$  が現れるとき、次のことに注意して下さい：

対数の式  $\log_a f(x)$  の真数  $f(x)$  は正である；

従って、その不等式が成り立つためには  $f(x) > 0$  でなければなりません。このことを真数条件といいます。

**例解** 変数  $x$  に関する不等式  $\log_3(5x-6) < 2$  を解きます。まず、対数の式  $\log_3(5x-6)$  の真数は正なので  $5x-6 > 0$  , よって  $x > \frac{6}{5}$  . 定理9.2.1より

$2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$  なので、

$$\log_3(5x-6) < 2 \iff \log_3(5x-6) < \log_3 9 ,$$

定理9.5より、

$$\log_3(5x-6) < \log_3 9 \iff 5x-6 < 9 \iff 5x < 15 \iff x < 3 .$$

従って、不等式  $\log_3(5x-6) < 2$  を解くと、  $x > \frac{6}{5}$  かつ  $x < 3$  , つまり  $\frac{6}{5} < x < 3$  . 終

**例題** 変数  $x$  に関する不等式  $\log_5(3x+7) > 2$  を解く。

【注意】 まず対数の式の真数が正になる条件 (真数条件) を考える。

【方針】 右辺を 5 を底とする対数の式にする。

【解説】 対数の式の真数は正なので、  $3x+7 > 0$  , よって  $x > -\frac{7}{3}$  . 不等式  $\log_5(3x+7) > 2$  の右辺は  $2 = \log_5 5^2 = \log_5 25$  なので、

$$\log_5(3x+7) > \log_5 25 ,$$

$$3x+7 > 25 ,$$

$$x > 6 .$$

故に与えられた不等式を解くと、  $x > -\frac{7}{3}$  かつ  $x > 6$  , つまり  $x > 6$  . 終

**問題9.5.2** 変数  $k$  に関する不等式  $3 - \log_2(5k-2) \geq 0$  を解きなさい。

**例題** 変数  $a$  に関する不等式  $2\log_9(2a-5) - 1 \leq 0$  を解く。

【注意】 まず対数の式の真数が正になる条件 (真数条件) を考える。

【方針】 両辺が 9 を底とする一つの対数の式になるように変形する。

【解説】 対数の式の真数は正なので、  $2a-5 > 0$  , よって  $a > \frac{5}{2}$  . 不等式  $2\log_9(2a-5) - 1 \leq 0$  より

$$\log_9(2a-5) \leq \frac{1}{2} .$$

この不等式の右辺は  $\frac{1}{2} = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \log_9 (3^2)^{\frac{1}{2}} = \log_9 3$  なので、

$$\log_9(2a-5) \leq \log_9 3 ,$$

$$2a-5 \leq 3 ,$$

$$a \leq 4 .$$

故に与えられた不等式を解くと、  $a > \frac{5}{2}$  かつ  $a \leq 4$  , つまり  $\frac{5}{2} < a \leq 4$  . 終

**問題9.5.3** 変数  $x$  に関する不等式  $3\log_8(5x-11) \geq 2$  を解きなさい。

実数  $a$  について  $0 < a < 1$  のとき、任意の正の実数  $r$  と  $s$  について、

$$\log_a r < \log_a s \iff r > s .$$

ですから、対数の式の底  $a$  が 1 より小さいときは、両辺から対数記号  $\log_a$  を外すとき不等号の向きが逆になります。

**例題** 変数  $y$  に関する不等式  $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > 2$  を解く。

【注意】 まず対数の式の真数が正になる条件 (真数条件) を考える。

【方針】 右辺を  $\frac{1}{2}$  を底とする対数の式にする。

【解説】 対数の式の真数は正なので、  $2y-1 > 0$  , よって  $y > \frac{1}{2}$  . 不等式  $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) \geq 2$  の右辺は  $2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$  なので、

$$\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} ,$$

対数の式の底  $\frac{1}{2}$  は 1 より小さいので、両辺から対数記号  $\log_{\frac{1}{2}}$  を外すとき不等号の向きが逆になる：

$$2y-1 < \frac{1}{4} ,$$

$$y < \frac{5}{8} .$$

故に与えられた不等式を解くと、  $y > \frac{1}{2}$  かつ  $y < \frac{5}{8}$  , つまり  $\frac{1}{2} < y < \frac{5}{8}$  . 終

**問題9.5.4** 変数  $z$  に関する不等式  $\log_{\frac{1}{3}}(4z-5) + 2 \geq 0$  を解きなさい。