

## §9.6 指数関数との合成関数のグラフ

定数  $a$  は実数で  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  とします. 定理 7.8.1 として述べたように,  $xy$  座標平面において次のことが成り立ちます: 関数  $f$  について,

$$y = f(-x) \text{ のグラフは } y = f(x) \text{ のグラフと } y \text{ 軸に関して対称である.}$$

ここで  $f(x) = a^x$  とおきます.

$$y = a^{-x} \text{ のグラフは } y = a^x \text{ のグラフと } y \text{ 軸に関して対称である.}$$

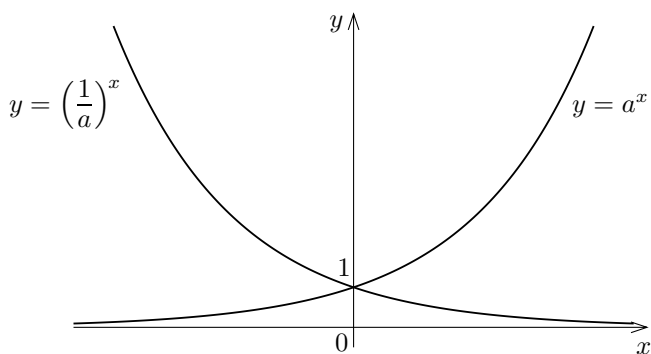
ここで

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x.$$

従って次のことがいえます:

$$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x \text{ のグラフは } y = a^x \text{ のグラフと } y \text{ 軸に関して対称である.}$$

例えば  $a > 1$  のとき次のようになります.

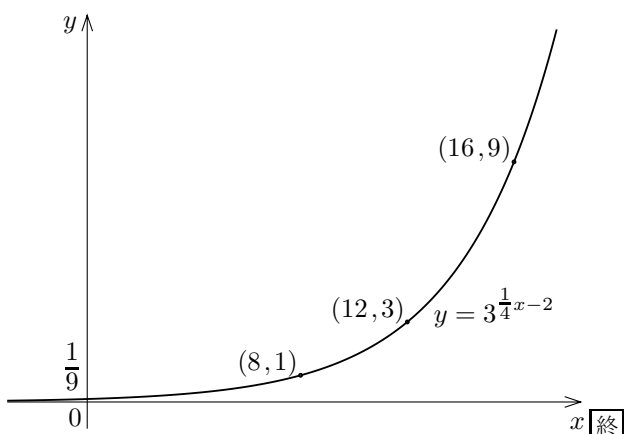


指数関数との合成関数のグラフを考えます.

**例解**  $xy$  座標平面において実数全体を定義域とする関数  $y = 3^{\frac{1}{4}x-2}$  のグラフの概形を考えます. 変数  $t$  を  $t = \frac{1}{4}x - 2$  とおきます.  $x = 4(t+2) = 4t + 8$ .  $t$  の値に対する  $x = 4t + 8$  の値と  $y = 3^{\frac{1}{4}x-2} = 3^t$  の値を調べます.

$t$	$x = 4t + 8$	$y = 3^t$
-2	0	$\frac{1}{9}$
-1	4	$\frac{1}{3}$
0	8	1
1	12	3
2	16	9

関数  $y = 3^{\frac{1}{4}x-2}$  のグラフは右図のようになります.



**問題 9.6.1**  $xy$  座標平面において実数全体を定義域とする関数  $y = 2^{\frac{2}{3}x+4}$  のグラフの概形を描きなさい.

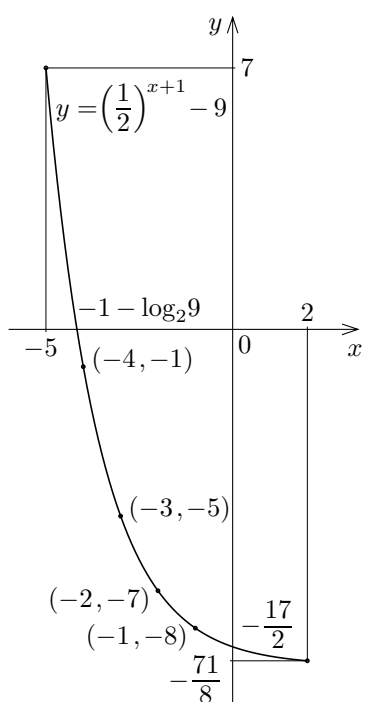
**例解**  $xy$  座標平面において区間  $[-5, 2]$  を定義域とする関数  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 9$  のグラフの概形を考えます.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 9 = \frac{1}{2^{x+1}} - 9 = 2^{-x-1} - 9.$$

変数  $t$  を  $t = -x - 1$  とおきます.  $x = -t - 1$ .  $-5 \leq x \leq 2$  なので  $4 \geq -x - 1 \geq -3$ , よって  $-3 \leq t \leq 4$ . この範囲で,  $t$  の値に対する  $x = -t - 1$  の値と  $y = 2^t - 9$  の値を調べます.

$t$	$x = -t - 1$	$y = 2^t - 9$
-3	2	$\frac{1}{8} - 9 = -\frac{71}{8}$
-2	1	$\frac{1}{4} - 9 = -\frac{35}{4}$
-1	0	$\frac{1}{2} - 9 = -\frac{17}{2}$
0	-1	$1 - 9 = -8$
1	-2	$2 - 9 = -7$
2	-3	$4 - 9 = -5$
3	-4	$8 - 9 = -1$
4	-5	$16 - 9 = 7$

関数  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 9$  において  $y = 0$  とすると,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 9 = 0$  なので,  $2^{-(x+1)} = 9$ ,  $-x - 1 = \log_2 9$ ,  $x = -1 - \log_2 9$ . グラフと  $x$  軸との共有点の  $x$  座標は  $-1 - \log_2 9$  です. 区間  $[-5, 2]$  を定義域とする関数  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 9$  のグラフは右上図のようになります.



**問題 9.6.2**  $xy$  座標平面において区間  $[-1, 4]$  を定義域とする関数  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 7$  のグラフの概形を描きなさい.

終