§9.6　指数関数との合成関数のグラフ

定数 a は実数で $a>0$, $a\neq 1$ とします．定理7.8.1として述べたように，xy 座標平面において次のことが成り立ちます：関数 f について，

$y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である．

ここで $f(x)=a^x$ とおきます．

$y=a^{-x}$ のグラフは $y=a^x$ のグラフと y 軸に関して対称である．

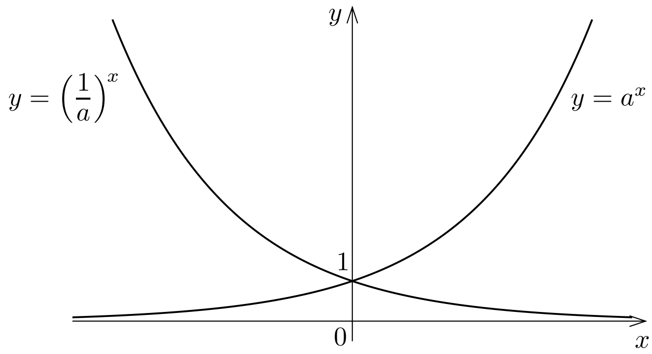
ここで

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x\ .$$

従って次のことがいえます：

$y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ のグラフは $y=a^x$ のグラフと y 軸に関して対称である．

例えば $a>1$ のとき次のようになります．

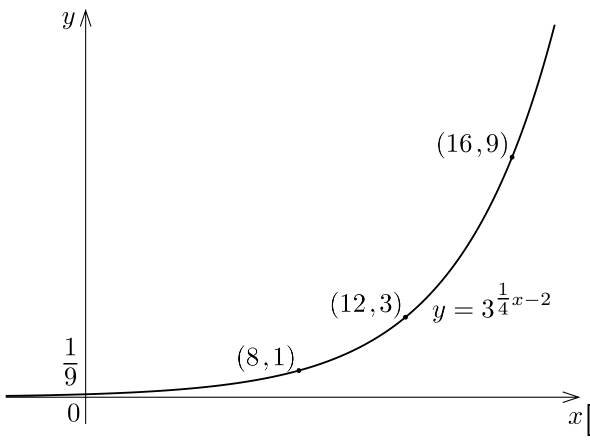


指数関数との合成関数のグラフを考えます．

$\boxed{\text{例解}}$ xy 座標平面において実数全体を定義域とする関数 $y=3^{\frac{1}{4}x-2}$ のグラフの概形を考えます．変数 t を $t=\dfrac{1}{4}x-2$ とおきます． $x=4(t+2)=4t+8$ ． t の値に対する $x=4t+8$ の値と $y=3^{\frac{1}{4}x-2}=3^t$ の値を調べます．

t	$x=4t+8$	$y=3^t$
-2	0	$\frac{1}{9}$
-1	4	$\frac{1}{3}$
0	8	1
1	12	3
2	16	9

関数 $y=3^{\frac{1}{4}x-2}$ のグラフは右図のようになります．



$\boxed{\text{終}}$

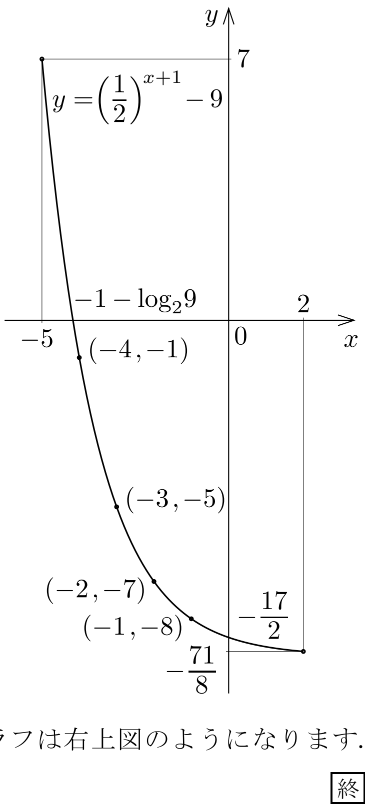
$\boxed{\text{問題 9.6.1}}$ xy 座標平面において実数全体を定義域とする関数 $y=2^{\frac{2}{3}x+4}$ のグラフの概形を描きなさい．

$\boxed{\text{例解}}$ xy 座標平面において区間 $[-5,2]$ を定義域とする関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}-9$ のグラフの概形を考えます．

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-9=\frac{1}{2^{x+1}}-9=2^{-x-1}-9\ .$$

変数 t を $t=-x-1$ とおきます． $x=-t-1$ ． $-5\leq x\leq 2$ なので $4\geq -x-1\geq -3$, よって $-3\leq t\leq 4$ ． この範囲で，t の値に対する $x=-t-1$ の値と $y=2^t-9$ の値を調べます．

t	$x=-u-1$	$y=2^t-9$
-3	2	$\frac{1}{8}-9=-\frac{71}{8}$
-2	1	$\frac{1}{4}-9=-\frac{35}{4}$
-1	0	$\frac{1}{2}-9=-\frac{17}{2}$
0	-1	$1-9-8$
1	-2	$2-9-7$
2	-3	$4-9-5$
3	-4	$8-9-1$
4	-5	$16-9=7$



関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}-9$ において $y=0$ とすると，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}-9=0$ なので，$2^{-(x+1)}=9$, $-x-1=\log_2 9$, $x=-1-\log_2 9$ ．グラフと x 軸との共有点の x 座標は $-1-\log_2 9$ です．区間 $[-5,2]$ を定義域とする関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}-9$ のグラフは右上図のようになります．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 9.6.2}}$ xy 座標平面において区間 $[-1,4]$ を定義域とする関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}-7$ のグラフの概形を描きなさい．