

§9.6 指数関数との合成関数のグラフ

定数 a は実数で $a > 0$, $a \neq 1$ とします. 定理 7.8.1 として述べたように, xy 座標平面において次のことが成り立ちます: 関数 f について,

$$y = f(-x) \text{ のグラフは } y = f(x) \text{ のグラフと } y \text{ 軸に関して対称である.}$$

ここで $f(x) = a^x$ とおきます.

$$y = a^{-x} \text{ のグラフは } y = a^x \text{ のグラフと } y \text{ 軸に関して対称である.}$$

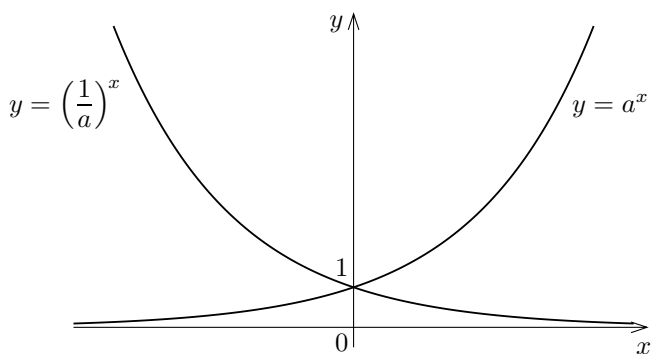
ここで

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x.$$

従って次のことがいえます:

$$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x \text{ のグラフは } y = a^x \text{ のグラフと } y \text{ 軸に関して対称である.}$$

例えば $a > 1$ のとき次のようになります.

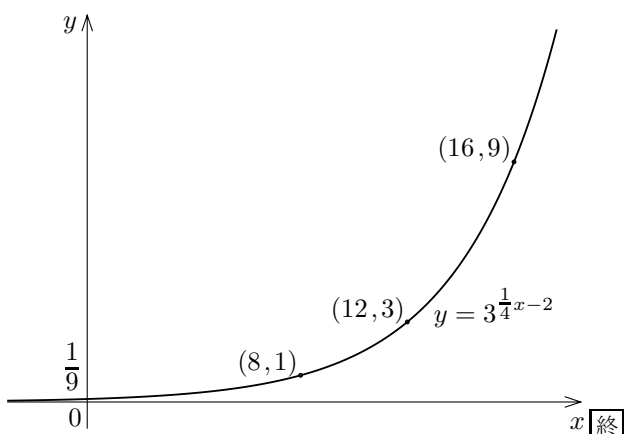


指数関数との合成関数のグラフを考えます.

例解 xy 座標平面において実数全体を定義域とする関数 $y = 3^{\frac{1}{4}x-2}$ のグラフの概形を考えます. 変数 t を $t = \frac{1}{4}x-2$ とおきます. $x = 4(t+2) = 4t+8$. t の値に対する $x = 4t+8$ の値と $y = 3^{\frac{1}{4}x-2} = 3^t$ の値を調べます.

t	$x = 4t+8$	$y = 3^t$
-2	0	$\frac{1}{9}$
-1	4	$\frac{1}{3}$
0	8	1
1	12	3
2	16	9

関数 $y = 3^{\frac{1}{4}x-2}$ のグラフは右図のようになります.



問題 9.6.1 xy 座標平面において実数全体を定義域とする関数 $y = 2^{\frac{2}{3}x+4}$ のグラフの概形を描きなさい.

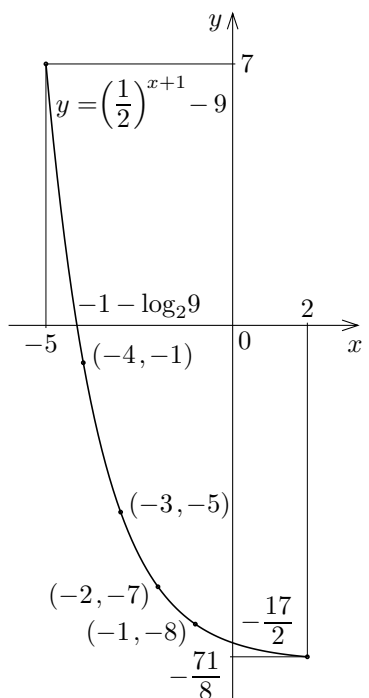
例解 xy 座標平面において区間 $[-5, 2]$ を定義域とする関数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 9$ のグラフの概形を考えます.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 9 = \frac{1}{2^{x+1}} - 9 = 2^{-x-1} - 9.$$

変数 t を $t = -x-1$ とおきます. $x = -t-1$. $-5 \leq x \leq 2$ なので $4 \geq -x-1 \geq -3$, よって $-3 \leq t \leq 4$. この範囲で, t の値に対する $x = -t-1$ の値と $y = 2^t - 9$ の値を調べます.

t	$x = -t-1$	$y = 2^t - 9$
-3	2	$\frac{1}{8} - 9 = -\frac{71}{8}$
-2	1	$\frac{1}{4} - 9 = -\frac{35}{4}$
-1	0	$\frac{1}{2} - 9 = -\frac{17}{2}$
0	-1	$1 - 9 = -8$
1	-2	$2 - 9 = -7$
2	-3	$4 - 9 = -5$
3	-4	$8 - 9 = -1$
4	-5	$16 - 9 = 7$

関数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 9$ において $y = 0$ とすると, $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 9 = 0$ なので, $2^{-(x+1)} = 9$, $-x-1 = \log_2 9$, $x = -1 - \log_2 9$. グラフと x 軸との共有点の x 座標は $-1 - \log_2 9$ です. 区間 $[-5, 2]$ を定義域とする関数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 9$ のグラフは右上図のようになります.



問題 9.6.2 xy 座標平面において区間 $[-1, 4]$ を定義域とする関数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 7$ のグラフの概形を描きなさい.