

## §9.7 対数関数との合成関数のグラフ

定数  $a$  は実数で  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  とします. 定理 7.8.1 として述べたように, 関数  $f$  について,  $xy$  座標平面において関数  $y = -f(x)$  のグラフは  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸に関して対称です. ここで  $f(x) = \log_a x$  とおきます.

$y = -\log_a x$  のグラフは  $y = \log_a x$  のグラフと  $x$  軸に関して対称である.

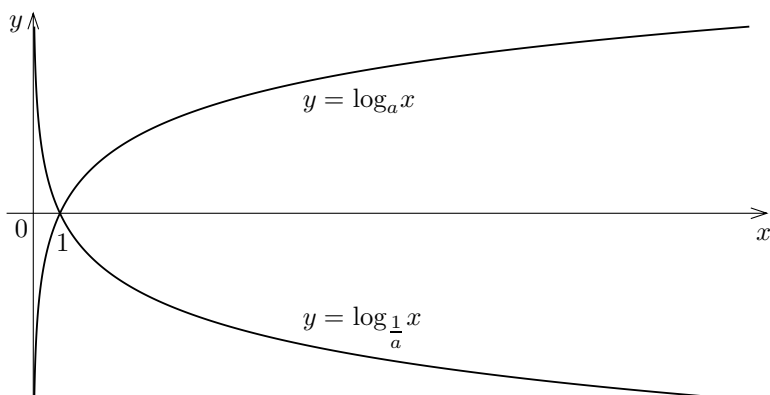
また, 対数の底の変換公式より,

$$\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a x}{-1} = -\log_a x.$$

従って次のことがいえます:

$y = \log_{\frac{1}{a}} x$  のグラフは  $y = \log_a x$  のグラフと  $x$  軸に関して対称である.

例えば  $a > 1$  のとき次のようになります.

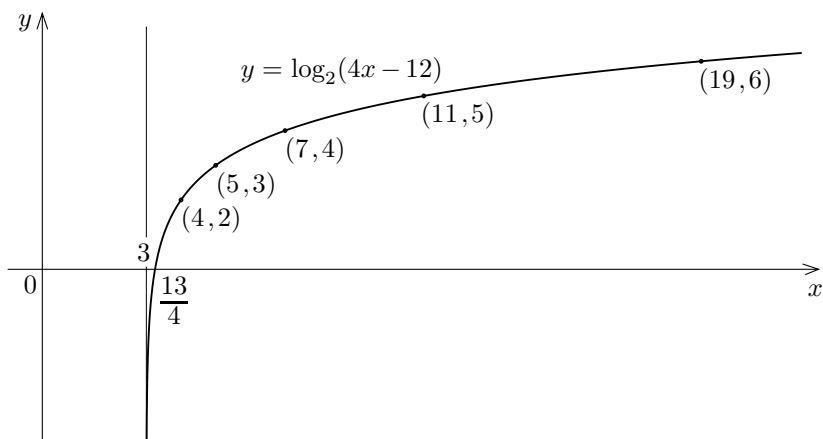


対数関数との合成関数のグラフを考えます.

**例解**  $xy$  座標平面において区間  $(3, \infty)$  を定義域とする関数  $y = \log_2(4x - 12)$  のグラフを描きます; またその漸近線を表す方程式を求めます. 変数  $t$  を  $t = 4x - 12$  とおきます.

$x = \frac{t+12}{4} = \frac{t}{4} + 3$ .  $y = \log_2(4x - 12)$  つまり  $y = \log_2 t$  より  $t = 2^y$ .  $y$  の値に対する  $t = 2^y$  の値と  $x = \frac{t}{4} + 3$  の値との対応を調べると右の表のようになります. 区間  $(3, \infty)$  を定義域とする関数  $y = \log_2(4x - 12)$  のグラフは次のようになります.

$y$	$t = 2^y$	$x = \frac{t}{4} + 3$
0	1	$\frac{13}{4}$
1	2	$\frac{7}{2}$
2	4	4
3	8	5
4	16	7
5	32	11
6	64	19



区間  $(3, \infty)$  を定義域とする関数  $y = \log_2(4x - 12)$  のグラフの漸近線は方程式  $x = 3$  で表される直線です. 終

**問題 9.7.1**  $xy$  座標平面において区間  $(-2, \infty)$  を定義域とする関数  $y = \log_3(9x + 18)$  のグラフを描きなさい; またその漸近線を表す方程式を求めなさい.

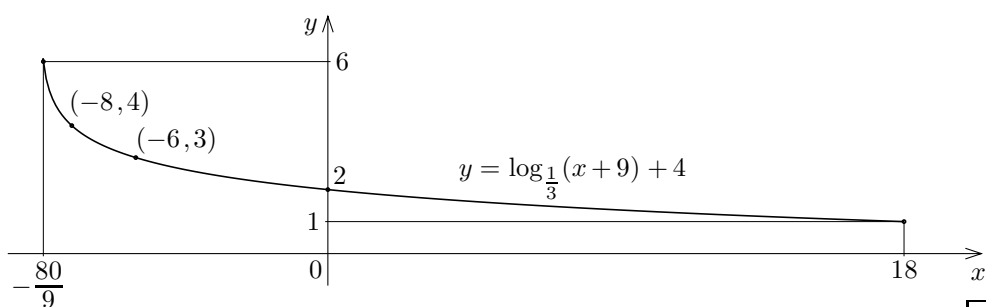
**例解**  $xy$  座標平面において区間  $[-\frac{80}{9}, 18]$  を定義域とする関数  $y = \log_{\frac{1}{3}}(x + 9) + 4$  のグラフを描きます. 変数  $u$  を  $u = x + 9$  とおきます.  $x = u - 9$ . 更に変数  $v$  を  $v = \log_{\frac{1}{3}}(x + 9)$  とおきます.  $y = \log_{\frac{1}{3}}(x + 9) + 4 = v + 4$ .  $v = \log_{\frac{1}{3}}(x + 9) = \log_{\frac{1}{3}} u$  なので

$$u = \left(\frac{1}{3}\right)^v = \frac{1}{3^v} = 3^{-v}. \quad -\frac{80}{9} \leq x \leq 18$$

なので  $-\frac{80}{9} \leq u - 9 \leq 18$ , よって

$\frac{1}{9} \leq u \leq 27$ . この範囲で,  $v$  の値に対する  $u = 3^{-v}$  の値と  $x = u - 9$  の値と  $y = v + 4$  の値との対応を調べると右の表のようになります. 区間  $[-\frac{80}{9}, 18]$  を定義域とする関数  $y = \log_{\frac{1}{3}}(x + 9) + 4$  のグラフは次のようになります.

$v$	$u = 3^{-v}$	$x = u - 9$	$y = v + 4$
2	$\frac{1}{9}$	$-\frac{80}{9}$	6
1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{26}{3}$	5
0	1	-8	4
-1	3	-6	3
-2	9	0	2
-3	27	18	1



**問題 9.7.2**  $xy$  座標平面において区間  $[\frac{33}{8}, 20]$  を定義域とする関数  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x - 4) + 1$  のグラフを描きなさい. 終