§9.8　常用対数

対数を表す式 $\log_a r$ の底 a は $a>0$, $a \neq 1$ であればよいので，対数の底にできる実数はいくらでもあります．その中で，10 を底とする対数を一つの標準とすることがあります．10 を底とする対数のことを常用対数といいます．例えば 2 及び 3 の常用対数の近似値は各々次のようになります：

$$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010 \ , \qquad \log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771 \ .$$

工学で用いられる対数は多くの場合常用対数です．それで，関数電卓のキーに表示された“log”は通常は常用対数を意味します．

常用対数が計算できるとき，常用対数以外の対数の値を求めるためには底の変換公式を用います：実数 a, b について， $a>0$, $a \neq 1$, $b>0$ のとき

$$\log_a b = \frac{\log_{10}b}{\log_{10}a} \ .$$

例えば,

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10}3}{\log_{10}2} \fallingdotseq \frac{0.4771}{0.3010} \fallingdotseq 1.585 \ .$$

例題　$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ となることを用いて $\log_{10}800$ の近似値を求める．

$$\begin{aligned}\log_{10}800 &= \log_{10}(2^3 \times 10^2) = \log_{10}2^3 + \log_{10}10^2 = 3\log_{10}2 + 2 \fallingdotseq 3 \times 0.3010 + 2 \\ &= 2.9030 \ .\end{aligned}$$

終

問題 9.8.1　$\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$ となることを用いて $\log_{10}9000$ の近似値を求めなさい．

例題　$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ となることを用いて $\log_{10}50$ の近似値を求める．

$$\log_{10}50 = \log_{10}\frac{100}{2} = \log_{10}10^2 - \log_{10}2 \fallingdotseq 2 - 0.3010 = 1.6990 \ .$$

終

問題 9.8.2　$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ となることを用いて $\log_{10}250$ の近似値を求めなさい．

例題　$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$, $\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$ となることを用いて $\log_{10}120$ の近似値を求める．

$$\begin{aligned}\log_{10}120 &= \log_{10}(2^2 \times 3 \times 10) = 2\log_{10}2 + \log_{10}3 + \log_{10}10 \\ &=\fallingdotseq 2 \times 0.3010 + 0.4771 + 1 \\ &= 2.0791 \ .\end{aligned}$$

終

問題 9.8.3　$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$, $\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$ となることを用いて $\log_{10}15$ の近似値を求めなさい．

例題　2 の常用対数を $\frac{3}{10}$ で近似し，3 の常用対数を $\frac{19}{40}$ で近似するとき，$\log_3 200$ を近似する既約分数を求める．

底の変換公式を用いて $\log_3 200$ を常用対数で表す.

$$\log_3 200 = \frac{\log_{10}200}{\log_{10}3} = \frac{\log_{10}2 + \log_{10}100}{\log_{10}3} \fallingdotseq \frac{\frac{3}{10}+2}{\frac{19}{40}} = \frac{92}{19} \ .$$

終

問題 9.8.4　2 の常用対数の値を $\frac{3}{10}$ で近似し，3 の常用対数の値を $\frac{19}{40}$ で近似するとき，$\log_2 9000$ を近似する既約分数を求めなさい．

正の実数 r について，r の整数部分とは，r 以下である最大の整数のことです．言い替えると，r の整数部分とは，r を小数で表して小数点以下を切り捨てて得られる整数のことです．例えば，7, 6.34 , $\frac{74}{3}$, $\sqrt{82}$ の各々の整数部分は 7, 6, 24, 9 です.

例解　正の実数 r の整数部分が 4 桁であるということは，r が 1000 以上 10000 未満ということです：

$$\begin{aligned} r \text{ の整数部分が 4 桁である} &\iff 1000 \leq r < 10000 \\ &\iff 10^3 \leq r < 10^4 \ .\end{aligned}$$

ここで各辺の常用対数をとります．定理 9.5 より，

$$10^3 \leq r < 10^4 \iff \log_{10}10^3 \leq \log_{10}r < \log_{10}10^4 \ .$$

$\log_{10}10^3 = 3$, $\log_{10}10^4 = 4$ なので,

$$10^3 \leq r < 10^4 \iff 3 \leq \log_{10}r < 4 \ .$$

こうして次のことが分かります：正の実数 r について,

$$r \text{ の整数部分が 4 桁である} \iff 3 \leq \log_{10}r < 4 \ .$$

終

一般的に次のようになります：正の自然数 n 及び正の実数 r について,

$$\begin{aligned} r \text{ の整数部分が } n \text{ 桁である} &\iff 10^{n-1} \leq r < 10^n \\ &\iff \log_{10}10^{n-1} \leq \log_{10}r < \log_{10}10^n \\ &\iff n-1 \leq \log_{10}r < n \ .\end{aligned}$$

このように，常用対数を用いて正の実数の整数部分の桁数を求めることができます．

例題　$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ となることを用いて，自然数 2^{100} の桁数を求める．

〔解答〕 $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ より，

$$\log_{10}2^{100} = 100 \times \log_{10}2 \fallingdotseq 100 \times 0.3010 = 30.10 \ .$$

従って $30 \leq \log_{10}2^{100} < 31$ なので,

$$10^{30} \leq 10^{\log_{10}2^{100}} < 10^{31} \ .$$

$10^{\log_{10}2^{100}} = 2^{100}$ なので， $10^{30} \leq 2^{100} < 10^{31}$ ．故に 2^{100} は 31 桁の自然数である．

終

問題 9.8.5　$\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$ となることを用いて，自然数 3^{20} の桁数を求めなさい．

問題 9.8.6　$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ となることを用いて，自然数 20^{10} の桁数を求めなさい．