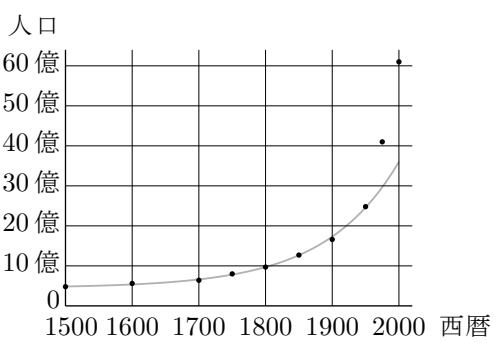
第9章の補遺1　指数関数が現れる事象

生物が子孫を増やしていく状況について，きわめて単純な状況を考えます．ある動物は，いつも雄と雌とが半分ずついて，総ての雄と雌とが一匹ずつ1回だけつがいになって4匹の子供を産むものとします．最初に雄雌が100匹ずつ併せて200匹の個体がいて，100組のつがいができたとします．これを第1世代とします．一つがいが4匹ずつ子供を産むので，次のようになります：

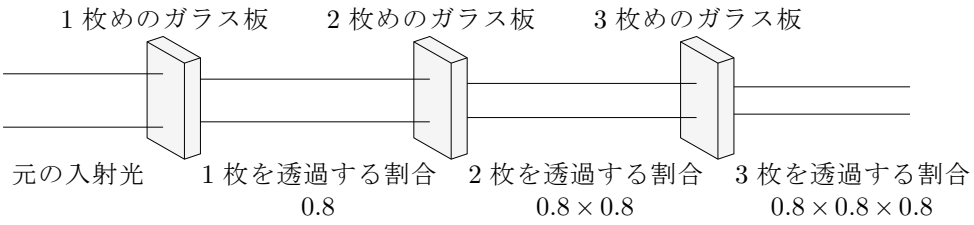
第1世代　　の個体数は　200 でつがいの数は　100 ；
第2世代（第1世代の子供達）の個体数は　400 でつがいの数は　200 ；
第3世代（第2世代の子供達）の個体数は　800 でつがいの数は　400 ；
第4世代（第3世代の子供達）の個体数は 1600 でつがいの数は　800 ；
第5世代（第4世代の子供達）の個体数は 3200 でつがいの数は 1600 ；
⋮　　.

このように，自然数 x に対して，第 x 世代の個体数は 100×2^x になります．これは極めて単純な例ですが，成長するための条件が整っているとき，世代あるいは時間に対する生物の個体数の増加は理論的には指数関数の定数倍の変化に近くなります．

個体数の増加の例として，西暦1500年から2000年までの間の世界の人口の推定値をプロットすると右図のようになります．この図より，世界の人口は，20世紀前半までは指数関数のグラフの形[1)]（右図の網掛けの曲線）にほぼ沿って増加してきたのに，20世紀後半に急増したことが分かります．



透明なガラスでも何枚も重ねるとだんだんと不透明になってきます．ガラスに差し込んだ光は幾らかの割合でガラスに吸収されるので，透過する（通り抜ける）量は差し込んだ量より減ります．例えばある一様なガラス板に垂直に光が差し込んだとき差し込んだ量に対して透過する量の割合は 0.8 であるとします．このガラス板を2枚並べます．垂直に差し込んだ光について，1枚めを透過する量の割合は 0.8 で，その内2枚めを透過する量の割合も 0.8 ですから，2枚のガラス板を透過する量の割合は $0.8\times 0.8=0.8^2$ です．更にこのガラス板を3枚並べると，1枚めと2枚めとを透過する量の割合が 0.8^2 で，その内3枚めを透過する量の割合も 0.8 なので，3枚のガラス板を透過する量の割合は $0.8^2\times 0.8=0.8^3$ です．



一般的に，自然数 x に対して，このガラス板を x 枚重ねたとき透過する光の量の割合は 0.8^x になります．ガラス板の厚さ 1cm とすると，光の吸収に関して，ガラス板を x 枚重ねたものは厚さ $x$cm のガラス板と考えられます；これを透過する光の量の割合が 0.8^x になります．このように，ガラス板に差し込んだ光が透過する量の割合はガラスの厚さに対する指数関数で表せます．

音波の音程と周波数との関係を考えます．音程が1オクターブ高くなると周波数は2倍になります．ですから，

音程が2オクターブ高くなると周波数は2倍の2倍つまり 2^2 倍に，
音程が3オクターブ高くなると周波数は2倍の2倍の2倍つまり 2^3 倍に，
音程が4オクターブ高くなると周波数は2倍の2倍の2倍の2倍つまり 2^4 倍に，

なります．一般的にいうと，自然数 x に対して，音程が x オクターブ高くなると周波数は 2^x 倍になります．このように，音の周波数の比は音階の指数関数になります．

借金を返さないでいると通常は利子がついて借金の金額が増えていきます．仮に，月 9% の複利で10万円の借金をするとどうなるでしょうか．月 9% の複利ということは，借金の金額に対して毎月 0.09 倍の利子が付くということですから，1ヶ月後には借金の金額が 1.09 倍になるということです．2ヶ月後には借金の金額は 1.09 倍の 1.09 倍つまり $(1.09)^2$ 倍になります．3ヶ月後には借金の金額は $(1.09)^2$ 倍の 1.09 倍つまり $(1.09)^3$ 倍になります．この調子で，自然数 x に対して，x ヶ月後には借金の金額は $(1.09)^x$ 倍になります．従って，10万円借りて全く返さずにいると，x ヶ月後の借金の金額は $10(1.09)^x$ 万円 になります．例えば，2年後の借金の金額は $10(1.09)^{24}$ 万円 $\fallingdotseq$ 79.11万円 で，3年後の借金の金額は $10(1.09)^{36}$ 万円 $\fallingdotseq$ 222.51万円です．

---

1) 正確には指数関数に定数を掛けて加えて補正した関数 ab^x+c （a,b,c は定数）のグラフです．