

第5章の補遺2 対数関数が現れる事象

補遺5.1で述べたように、自然数 h に対して、音波の音程が h オクターブ高くなると周波数は 2^h 倍になります。ですから、周波数 1kHz の音程より h オクターブ高い音程の周波数が f kHz になる実数 f について、 $f = 2^h$ ですから、定理9.2.1より

$$\log_2 f = \log_2 2^h = h,$$

つまり $h = \log_2 f$ です。このように、周波数 f kHz の音程は周波数 1kHz の音程より $\log_2 f$ だけ高くなります。音程は人間が音を聞いたときに感じる音の高さを表しますから、次のことがいえます：音波の周波数に対して人間が感じる音の高さは周波数の対数に比例する。

多くの物理的刺激に対する人間の感覚について次のことが成り立つとされています：刺激の物理量が P_0 のときの感覚の程度を基準とするとき、刺激の物理量が P のときの感覚の程度は大体 $\frac{P}{P_0}$ の対数に比例する。この法則をフェヒナーの法則²⁾といいます。

ある点における音の強さとはその点を通る音波のエネルギー量です³⁾。音の強さが大きいほど大きな音になります。しかし、人間が聞いて感じる音の大きさは音の強さに比例しません。音の強さが I_0 のときに感じる音の大きさを基準とするとき、音の強さが I のときに感じる音の大きさは大体 $\frac{I}{I_0}$ の対数に比例します。これはフェヒナーの法則の一例です。そこで、人間が聞き取ることのできる最小の音を基準として（本当は基準となる音はもっと厳密に定められています）、この音の強さを I_0 とおきます。このとき、音の強さ I に対する音の大きさのレベル L を次のように定めます：

$$L = \left(10 \log_{10} \frac{I}{I_0}\right) \text{dB}.$$

ここで dB は音の大きさのレベルの単位で、デシベル⁴⁾あるいはデジベルといいます。

空気中のある物質によって臭気が発生するとします。その物質の濃度が C_0 のとき人が感じる臭気の強さを基準にします。ある定数 k をとると、その物質の濃度が C のとき人が感じる臭気の強さ I は大体次のようになるとされています：

$$I = k \log_{10} \frac{C}{C_0}.$$

これもフェヒナーの法則の一例です。

このように、人間の感覚は物理的刺激に対して概ねその対数をとるような働きを持っています。

地震の大きさを表す“マグニチュード”という単位があります。地震のマグニチュードはもともと次のように定められました：地震の中心から 100km のところに置かれた特定の型の地震計（ウッド・アンダーソン型地震計）の記録紙上で最大のふれ（最大振幅）が $W \mu\text{m}$ ⁵⁾ であるとき、その地震のマグニチュードは $\log_{10} W$ である。地震のマグニチュードが2大きくなると地震のエネルギーはほぼ1000倍になります。従って、地震のマグニチュードが1大きくなると地震のエネルギーはほぼ $1000^{\frac{1}{2}}$ 倍つまりほぼ 31.6 倍になります。

²⁾ 先駆けとなる研究結果のウエーバーの法則と併せてウエーバー・フェヒナーの法則ということもあります。

³⁾ 正確にいうと、ある点における音の強さとはその点を通して音波の進む方向に垂直な単位面積を単位時間に通過する音波のエネルギー量です。

⁴⁾ デシベル dB は、音の大きさのレベルだけに限らず、さまざまな物理量の相対的なレベルを表すときに用いられます。デシベル dB を単位とするとき、物理量 P_0 に対する物理量 P の相対的なレベルは $\left(10 \log_{10} \frac{P}{P_0}\right) \text{dB}$ と定められます。

⁵⁾ μm は長さの単位で $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{m}$ 。