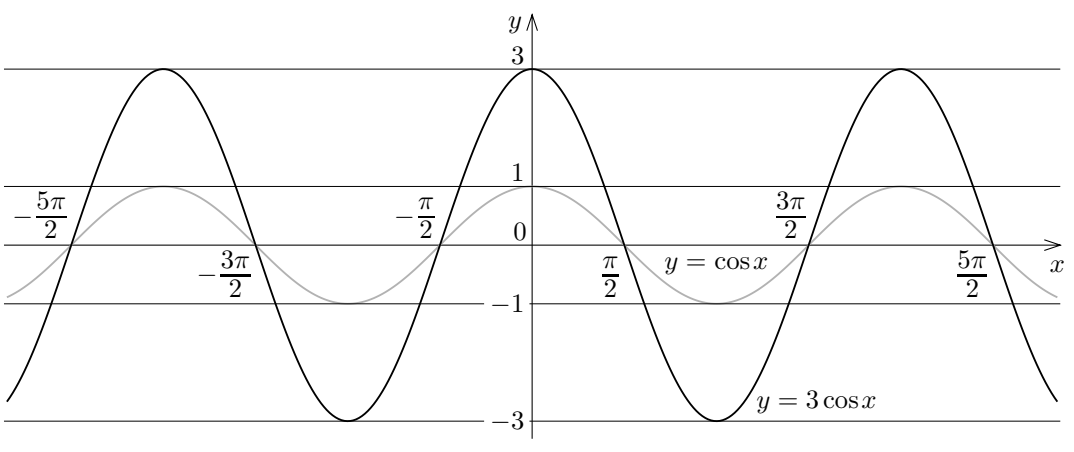
§10.6　三角関数を含む合成関数のグラフ

問題 10.6.1　各実数 t に対して，関数 $y=3\cos x$ のグラフの点 $(t,3\cos t)$ は関数 $y=\cos x$ のグラフの点 $(t,\cos t)$ の y 座標だけを 3 倍にした点である．よって，$y=3\cos x$ のグラフは $y=\cos x$ のグラフの各点の y 座標だけを 3 倍した点の全体である．関数 $y=\cos x$ のグラフを網掛けの線で，関数 $y=3\cos x$ のグラフを実線で描く．



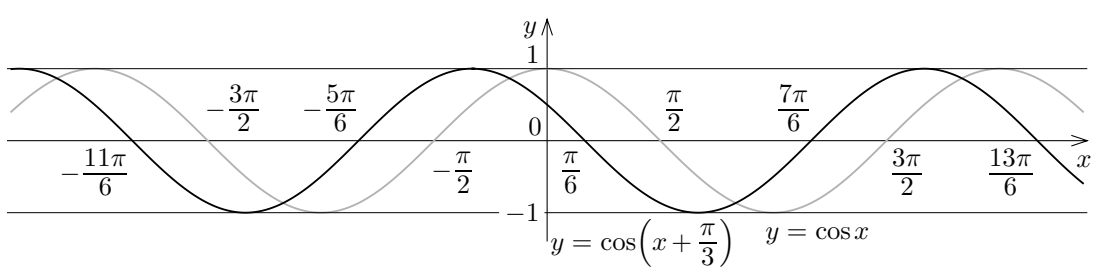
問題 10.6.2　変数 t を $t=x+\frac{\pi}{3}$ とおく．このとき $x=t-\frac{\pi}{3}$．関数 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフの各点 (x,y) は

$$(x,y)=\left(x,\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(t-\frac{\pi}{3},\cos t\right);$$

この点は関数 $y=\cos x$ のグラフの点 $(t,\cos t)$ を x 軸の向きに $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動させた点である．よって，$y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは $y=\cos x$ のグラフを x 軸の向きに $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動させた曲線である．関数 $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ の基本周期は 2π なので，$y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は，

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6},\quad -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6},\quad \frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{6},\quad -\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=-\frac{11\pi}{6},\quad \frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{13\pi}{6}$$

などである．関数 $y=\cos x$ のグラフを網掛けの線で，関数 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフを実線で描く．



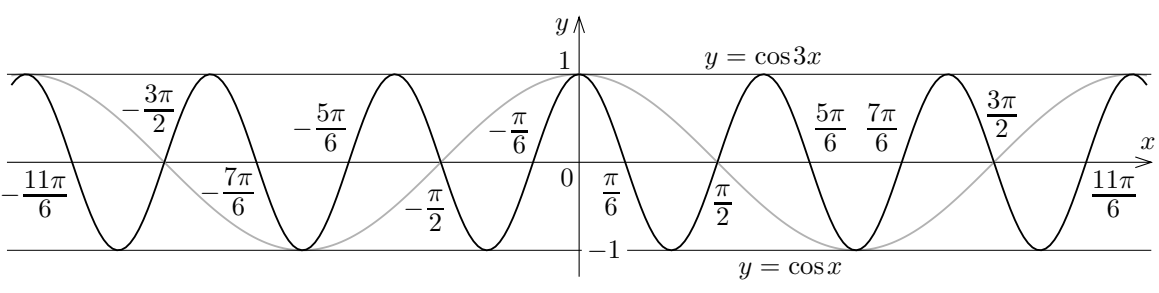
問題 10.6.3　変数 t を $t=3x$ とおく．このとき $x=\frac{t}{3}$．関数 $y=\cos 3x$ のグラフの各点 (x,y) は

$$(x,y)=(x,\cos 3x)=\left(\frac{t}{3},\cos t\right);$$

この点は関数 $y=\cos x$ のグラフの点 $(t,\cos t)$ の x 座標だけを $\frac{1}{3}$ 倍にした点である．よって，$y=\cos 3x$ のグラフは $y=\cos x$ のグラフの各点の x 座標だけを $\frac{1}{3}$ 倍した点の全体である．関数 $\cos 3x$ の基本周期は $\frac{2\pi}{3}$ なので，$y=\cos 3x$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は，

$$\pm\frac{\pi}{6},\ \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{5\pi}{6},\ \pm\frac{7\pi}{6},\ \pm\frac{3\pi}{2},\ \pm\frac{11\pi}{6},$$

などである．関数 $y=\cos x$ のグラフを網掛けの線で，関数 $y=\cos 3x$ のグラフを実線で描く．



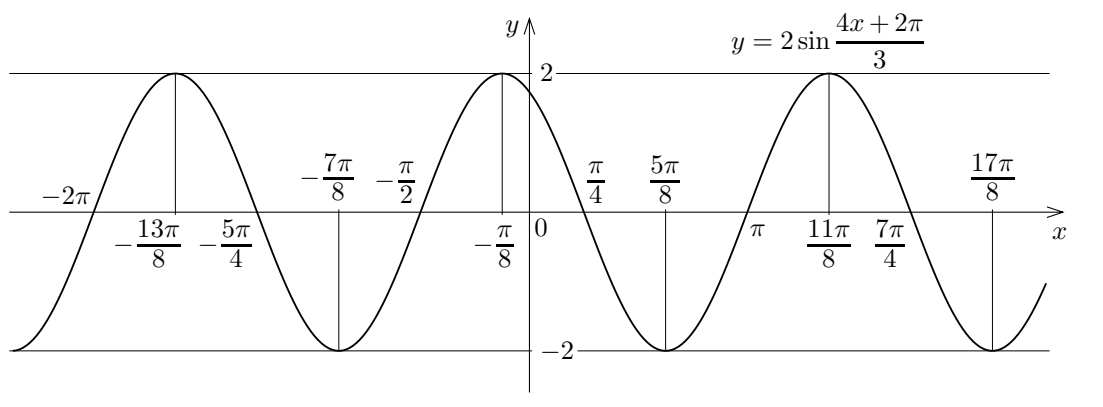
問題 10.6.4

(1)　関数 $y=2\sin\frac{4x+2\pi}{3}$ の基本周期は $2\pi\div\left|\frac{4}{3}\right|=\frac{3\pi}{2}$ である．

(2)　$\frac{4x+2\pi}{3}=0$ つまり $x=-\frac{\pi}{2}$ のとき $y=\frac{4x+2\pi}{3}=2\sin 0=0$．基本周期が $\frac{3\pi}{2}$ なので，関数 $y=2\sin\frac{4x+2\pi}{3}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標は，

$$-\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\quad -\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}=-\frac{5\pi}{4},\quad -\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=\pi,\quad -\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}=-2\pi.$$

(3)　関数 $\frac{4x+2\pi}{3}$ は単調増加で，関数 $2\sin x$ は 0 の付近で単調増加なので，関数 $2\sin\frac{4x+2\pi}{3}$ は $-\frac{\pi}{2}$ の付近で単調増加である．関数 $y=2\sin\frac{4x-2\pi}{3}$ のグラフは次のようになる．



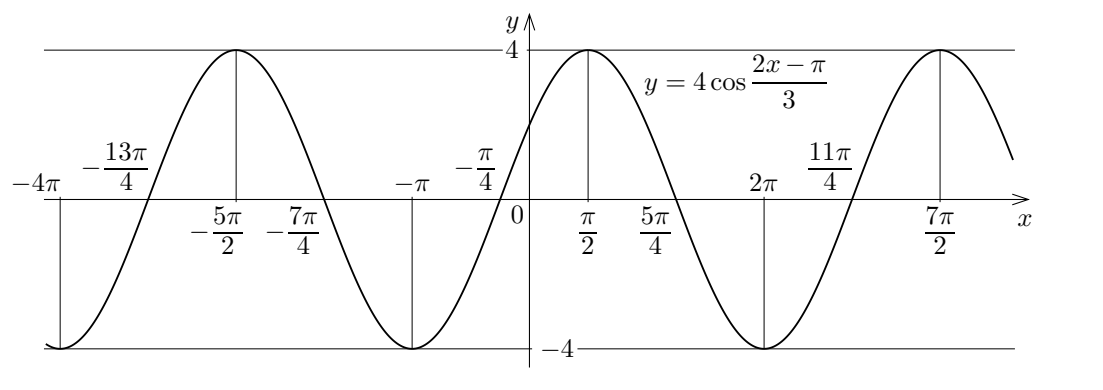
問題 10.6.5

(1)　関数 $y=4\cos\frac{2x-\pi}{3}$ の基本周期は $2\pi\div\left|\frac{2}{3}\right|=3\pi$ である．

(2)　$\frac{2x-\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ つまり $x=\frac{5\pi}{4}$ のとき $y=4\cos\frac{2x-\pi}{3}=4\cos\frac{\pi}{2}=0$．基本周期が 3π なので，関数 $y=4\cos\frac{2x-\pi}{3}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標は，

$$\frac{5\pi}{4},\quad \frac{5\pi}{4}-\frac{3\pi}{2}=-\frac{\pi}{4},\quad \frac{5\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}=\frac{11\pi}{4},\quad \frac{5\pi}{4}-3\pi=-\frac{7\pi}{4},\quad \frac{5\pi}{4}+3\pi=\frac{17\pi}{4}.$$

(3)　関数 $\frac{2x-\pi}{3}$ は単調増加で，関数 $4\cos x$ は $\frac{\pi}{2}$ の付近で単調減少なので，関数 $4\cos\frac{2x-\pi}{3}$ は $\frac{5\pi}{4}$ の付近で単調減少である．関数 $y=4\cos\frac{2x-\pi}{3}$ のグラフは次のようになる．



問題 10.6.6

(1)　関数 $y=\tan\frac{2x+\pi}{6}$ の基本周期は $\pi\div\left|\frac{2}{6}\right|=3\pi$ である．

(2)　$\frac{2x+\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ とすると $x=\pi$．基本周期が 3π なので，関数 $y=\tan\frac{2x+\pi}{6}$ のグラフの漸近線の幾つかについて表す方程式は，

$$x=\pi,\quad x=-2\pi,\quad x=4\pi,\quad x=-5\pi.$$

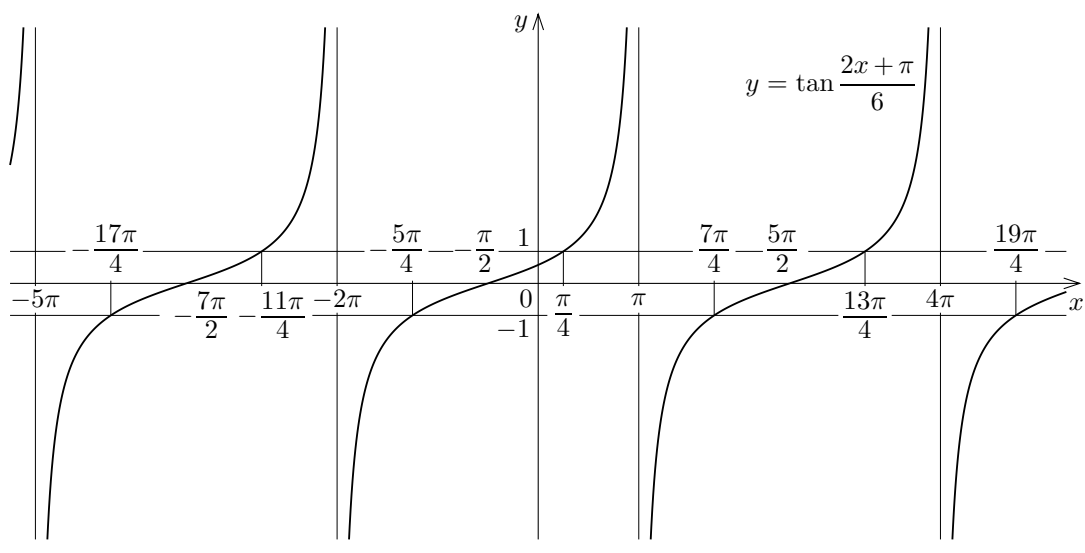
(3)　$\frac{2x+\pi}{6}=0$ つまり $x=\frac{\pi}{2}$ のとき $y=\tan\frac{2x+\pi}{6}=\tan 0=0$．基本周期は 3π なので，関数 $y=\tan\frac{2x+\pi}{6}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標は，

$$-\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}+3\pi=\frac{5\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}-3\pi=-\frac{7\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}+6\pi=\frac{11\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}-6\pi=-\frac{13\pi}{2}.$$

(4)　$\frac{2x+\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$ つまり $x=\frac{\pi}{4}$ のとき $y=\tan\frac{2x+\pi}{6}=\tan\frac{\pi}{4}=1$．基本周期が 3π なので，関数 $y=\tan\frac{2x+\pi}{6}$ のグラフの点で y 座標が 1 の点の幾つかの x 座標は，

$$\frac{\pi}{4},\quad \frac{\pi}{4}-3\pi=-\frac{11\pi}{4},\quad \frac{\pi}{4}+3\pi=-\frac{13\pi}{4}.$$

(5)　$\frac{2x+\pi}{6}=-\frac{\pi}{4}$ つまり $x=-\frac{5\pi}{4}$ のとき $y=\tan\frac{2x+\pi}{6}=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$．基本周期は 3π なので，関数 $y=\tan\frac{2x+\pi}{6}$ のグラフの点で y 座標が -1 の点の幾つかの x 座標は，

$$-\frac{5\pi}{4},\quad -\frac{5\pi}{4}+3\pi=\frac{7\pi}{4},\quad -\frac{5\pi}{4}-3\pi=-\frac{17\pi}{4}.$$

(6)　関数 $y=\tan\frac{2x+\pi}{6}$ のグラフは次のようになる．