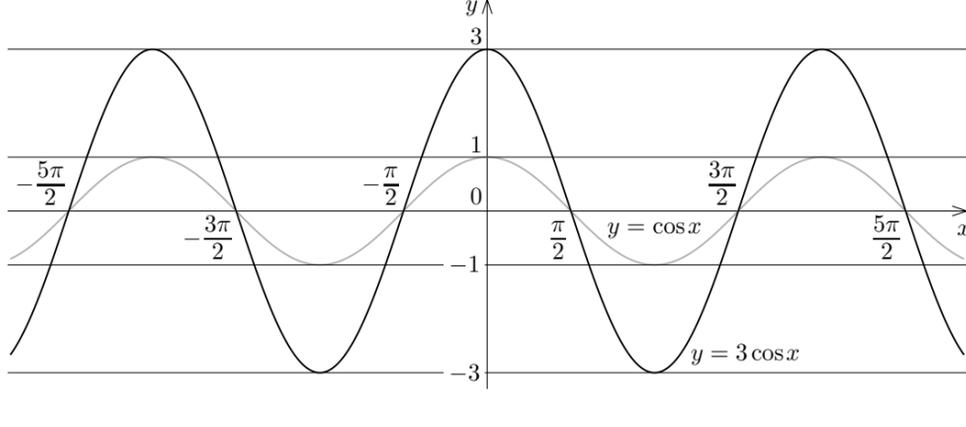


§ 10.6 三角関数を含む合成関数のグラフ

問題 10.6.1 各実数 t に対して、関数 $y = 3 \cos x$ のグラフの点 $(t, 3 \cos t)$ は関数 $y = \cos x$ のグラフの点 $(t, \cos t)$ の y 座標だけを 3 倍にした点である。よって、 $y = 3 \cos x$ のグラフは $y = \cos x$ のグラフの各点の y 座標だけを 3 倍した点の全体である。関数 $y = \cos x$ のグラフを網掛けの線で、関数 $y = 3 \cos x$ のグラフを実線で描く。



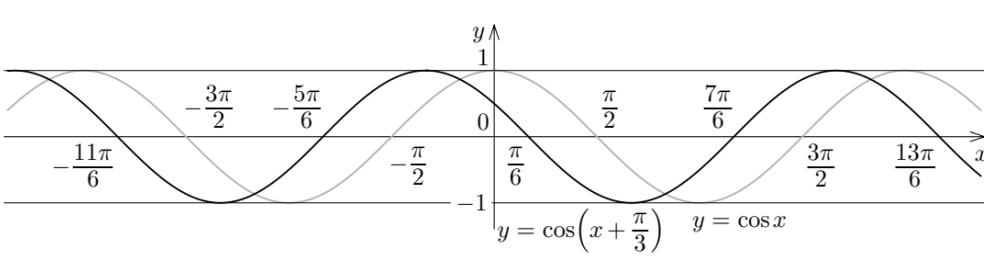
問題 10.6.2 変数 t を $t = x + \frac{\pi}{3}$ とおく。このとき $x = t - \frac{\pi}{3}$ 。関数 $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ のグラフの各点 (x, y) は

$$(x, y) = \left(x, \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(t - \frac{\pi}{3}, \cos t\right);$$

この点は関数 $y = \cos x$ のグラフの点 $(t, \cos t)$ を x 軸の向きに $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動させた点である。よって、 $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ のグラフは $y = \cos x$ のグラフを x 軸の向きに $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動させた曲線である。関数 $\cos(x + \frac{\pi}{3})$ の基本周期は 2π なので、 $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は、

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}, \quad -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}, \quad \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}, \quad -\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{11\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{6}$$

などである。関数 $y = \cos x$ のグラフを網掛けの線で、関数 $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ のグラフを実線で描く。



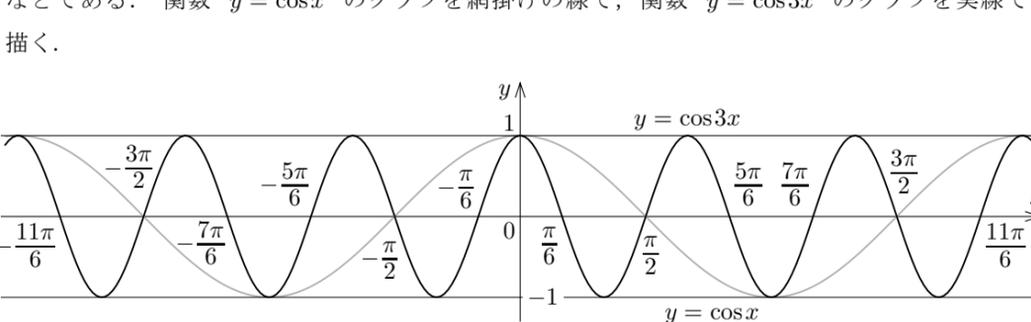
問題 10.6.3 変数 t を $t = 3x$ とおく。このとき $x = \frac{t}{3}$ 。関数 $y = \cos 3x$ のグラフの各点 (x, y) は

$$(x, y) = \left(x, \cos 3x\right) = \left(\frac{t}{3}, \cos t\right);$$

この点は関数 $y = \cos x$ のグラフの点 $(t, \cos t)$ の x 座標だけを $\frac{1}{3}$ 倍にした点である。よって、 $y = \cos 3x$ のグラフは $y = \cos x$ のグラフの各点の x 座標だけを $\frac{1}{3}$ 倍した点の全体である。関数 $\cos 3x$ の基本周期は $\frac{2\pi}{3}$ なので、 $y = \cos 3x$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は、

$$\pm \frac{\pi}{6}, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{6}, \pm \frac{7\pi}{6}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{11\pi}{6},$$

などである。関数 $y = \cos x$ のグラフを網掛けの線で、関数 $y = \cos 3x$ のグラフを実線で描く。



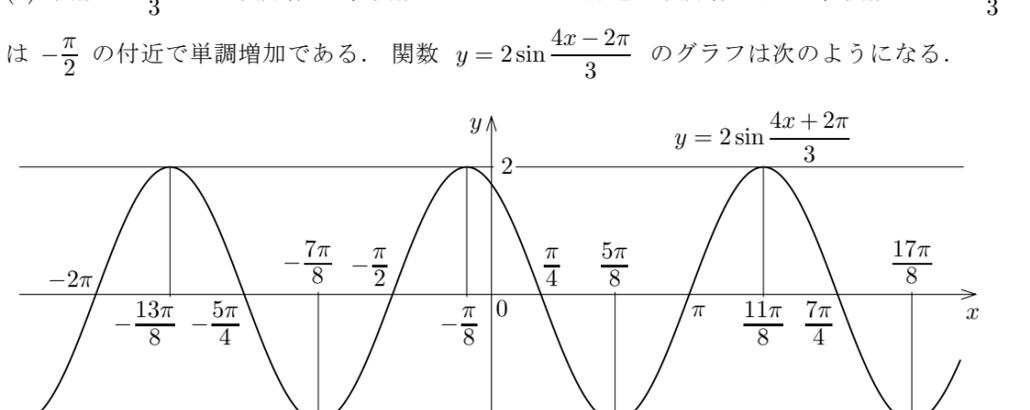
問題 10.6.4

(1) 関数 $y = 2 \sin \frac{4x+2\pi}{3}$ の基本周期は $2\pi \div \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{3\pi}{2}$ である。

(2) $\frac{4x+2\pi}{3} = 0$ つまり $x = -\frac{\pi}{2}$ のとき $y = \frac{4x+2\pi}{3} = 2 \sin 0 = 0$ 。基本周期が $\frac{3\pi}{2}$ なので、関数 $y = 2 \sin \frac{4x+2\pi}{3}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標は、

$$-\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = \pi, \quad -\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -2\pi.$$

(3) 関数 $\frac{4x+2\pi}{3}$ は単調増加で、関数 $2 \sin x$ は 0 の付近で単調増加なので、関数 $2 \sin \frac{4x+2\pi}{3}$ は $-\frac{\pi}{2}$ の付近で単調増加である。関数 $y = 2 \sin \frac{4x-2\pi}{3}$ のグラフは次のようになる。



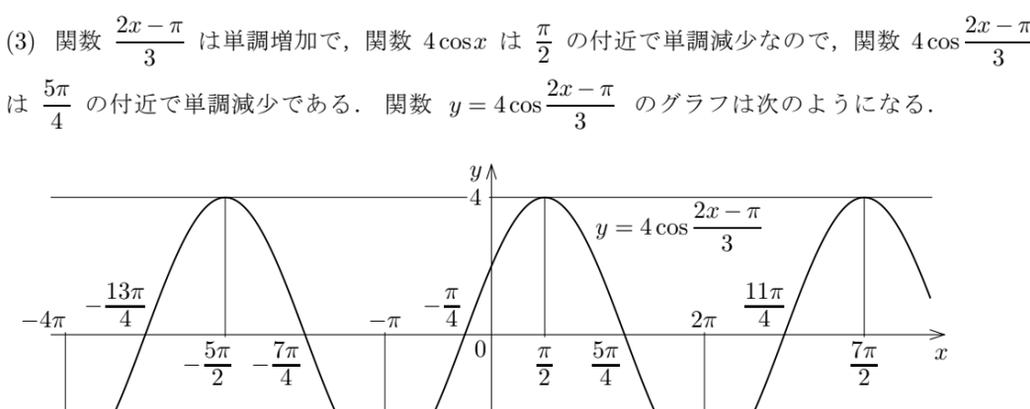
問題 10.6.5

(1) 関数 $y = 4 \cos \frac{2x-\pi}{3}$ の基本周期は $2\pi \div \left|\frac{2}{3}\right| = 3\pi$ である。

(2) $\frac{2x-\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ つまり $x = \frac{5\pi}{4}$ のとき $y = 4 \cos \frac{2x-\pi}{3} = 4 \cos \frac{\pi}{2} = 0$ 。基本周期が 3π なので、関数 $y = 4 \cos \frac{2x-\pi}{3}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標は、

$$\frac{5\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{11\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4} - 3\pi = -\frac{7\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4} + 3\pi = \frac{17\pi}{4}.$$

(3) 関数 $\frac{2x-\pi}{3}$ は単調増加で、関数 $4 \cos x$ は $\frac{\pi}{2}$ の付近で単調減少なので、関数 $4 \cos \frac{2x-\pi}{3}$ は $\frac{5\pi}{4}$ の付近で単調減少である。関数 $y = 4 \cos \frac{2x-\pi}{3}$ のグラフは次のようになる。



問題 10.6.6

(1) 関数 $y = \tan \frac{2x+\pi}{6}$ の基本周期は $\pi \div \left|\frac{2}{6}\right| = 3\pi$ である。

(2) $\frac{2x+\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ とすると $x = \pi$ 。基本周期が 3π なので、関数 $y = \tan \frac{2x+\pi}{6}$ のグラフの漸近線の幾つかについて表す方程式は、

$$x = \pi, \quad x = -2\pi, \quad x = 4\pi, \quad x = -5\pi.$$

(3) $\frac{2x+\pi}{6} = 0$ つまり $x = \frac{\pi}{2}$ のとき $y = \tan \frac{2x+\pi}{6} = \tan 0 = 0$ 。基本周期は 3π なので、関数 $y = \tan \frac{2x+\pi}{6}$ のグラフと x 軸との共有点の幾つかの x 座標は、

$$-\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{5\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} - 3\pi = -\frac{7\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} + 6\pi = \frac{11\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} - 6\pi = -\frac{13\pi}{2}.$$

(4) $\frac{2x+\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$ つまり $x = \frac{\pi}{4}$ のとき $y = \tan \frac{2x+\pi}{6} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ 。基本周期が 3π なので、関数 $y = \tan \frac{2x+\pi}{6}$ のグラフの点で y 座標が 1 の点の幾つかの x 座標は、

$$\frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} - 3\pi = -\frac{11\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} + 3\pi = \frac{13\pi}{4}.$$

(5) $\frac{2x+\pi}{6} = -\frac{\pi}{4}$ つまり $x = -\frac{5\pi}{4}$ のとき $y = \tan \frac{2x+\pi}{6} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ 。基本周期は 3π なので、関数 $y = \tan \frac{2x+\pi}{6}$ のグラフの点で y 座標が -1 の点の幾つかの x 座標は、

$$-\frac{5\pi}{4}, \quad -\frac{5\pi}{4} + 3\pi = \frac{7\pi}{4}, \quad -\frac{5\pi}{4} - 3\pi = -\frac{17\pi}{4}.$$

(6) 関数 $y = \tan \frac{2x+\pi}{6}$ のグラフは次のようになる。

