第10章の補遺3　逆三角関数の利用

$\boxed{\text{問題 10.補遺3.1}}$　$\tan a = -\dfrac{7}{5}$ なので $\tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1}\left(-\dfrac{7}{5}\right) = -\tan^{-1}\dfrac{7}{5}$ ． 点 P の x 座標が正なので， $-\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\tan^{-1}(\tan a) = a$ ． 故に $a = -\tan^{-1}\dfrac{7}{5}$ ．

$\boxed{\text{問題 10.補遺3.2}}$　$\tan b = -\dfrac{3}{4}$ なので $\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\left(-\dfrac{3}{4}\right) = -\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ ． $\dfrac{\pi}{2} < b < \dfrac{3\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} < b-\pi < \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\{\tan(b-\pi)\} = b-\pi$ ． 従って $b-\pi = -\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ なので， $b = \pi - \tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ ．

$\boxed{\text{問題 10.補遺3.3}}$　XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(4,-3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u$rad（ s は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ としてよい． 任意の実数 x について

$$4\sin x - 3\cos x \;=\; \sqrt{4^2+(-3)^2}\,\sin(x+u) \;=\; 5\sin(x+u)\ .$$

$\tan u = -\dfrac{3}{4}$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan u) \;=\; \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) \;=\; -\tan^{-1}\frac{3}{4}\ .$$

$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = u$ ，よって $u = -\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ ． 故に $r=5$ ， $s = -\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ とすればよい．

$\boxed{\text{問題 10.補遺3.4}}$　XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(-7,-4)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u$rad（ u は実数）とおく． $-\dfrac{3\pi}{2} < u < -\dfrac{\pi}{2}$ としてよい． 任意の実数 x について

$$-7\sin x - 4\cos x \;=\; \sqrt{(-7)^2+(-4)^2}\,\sin(x+s) \;=\; \sqrt{65}\,\sin(x+s)\ .$$

$\tan s = \dfrac{4}{7}$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan s) \;=\; \tan^{-1}\frac{4}{7}\ .$$

$-\dfrac{3\pi}{2} < s < -\dfrac{\pi}{2}$ より $-\dfrac{\pi}{2} < s+\pi < \dfrac{\pi}{2}$ なので， $\tan^{-1}\{\tan(s+\pi)\} = s+\pi$ ，よって

$$\tan^{-1}(\tan s) \;=\; \tan^{-1}\{\tan(s+\pi)\} \;=\; s+\pi\ ,$$

従って $s+\pi = \tan^{-1}\dfrac{4}{7}$ なので， $s = \tan^{-1}\dfrac{4}{7} - \pi$ ． 故に $r = \sqrt{65}$ ， $s = \tan^{-1}\dfrac{4}{7} - \pi$ とすればよい．