§3.11　等式の証明

$\boxed{\text{問題 3.11.1}}$

$$\begin{aligned}(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 &= a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2\\ &= 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\\ &= 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\ .\end{aligned}$$

故に，任意の複素数 a,b,c について $2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.

$\boxed{\text{問題 3.11.2}}$　与えられた等式の左辺は

$$(ab+6)^2-(2a+3b)^2 = a^2b^2+12ab+36-(4a^2+12ab+9b^2) = a^2b^2-4a^2-9b^2+36\ .$$

与えられた等式の右辺は

$$(a^2-9)(b^2-4) = a^2b^2-4a^2-9b^2+36\ .$$

故に，任意の複素数 a,b について $(ab+6)^2-(2a+3b)^2=(a^2-9)(b^2-4)$.

$\boxed{\text{問題 3.11.3}}$

$$\begin{aligned}(a+b-c)^2-4a(b-c)-(a-b+c)^2 &= (a+b-c)^2-(a-b+c)^2-4a(b-c)\\ &= (a+b-c+a-b+c)\{a+b-c-(a-b+c)\}-4a(b-c)\\ &= 2a(2b-2c)-4a(b-c)\\ &= 0\ .\end{aligned}$$

故に，任意の複素数 a,b について $(a+b-c)^2-4a(b-c)=(a-b+c)^2$.

$\boxed{\text{問題 3.11.4}}$　複素数 a,b について $a-b=3$ と仮定する． $b=a-3$ ． このとき，

$$a^3-b^3 = a^3-(a-3)^3 = a^3-(a^3-9a^2+27a-27) = 9a^2-27a-27\ .$$

また

$$9(ab+a-b) = 9\{a(a-3)+a-(a-3)\} = 9(a^2-3a+9) = 9a^2-27a+27\ .$$

よって $a^3-b^3=9(ab+a-b)$.

故に，任意の複素数 a,b について， $a-b=3$ ならば $a^3-b^3=9(ab+a-b)$.

$\boxed{\text{問題 3.11.5}}$　複素数 a,b,c について $a+b+c=0$ と仮定する． $c=-a-b$ ． このとき，

$$a^3+b^3+c^3 = a^3+b^3+(-a-b)^3 = a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3 = -3ab(a+b)\ .$$

また

$$3abc = 3ab(-a-b) = -3ab(a+b)\ .$$

よって $a^3+b^3+c^3=3abc$.

故に，任意の複素数 a,b,c について， $a+b+c=0$ ならば $a^3+b^3+c^3=3abc$.

$\boxed{\text{問題 3.11.6}}$　複素数 a,b,c について $a+b+c=0$ と仮定する． $c=-a-b$ ． このとき，

$$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+(-a-b)^2=a^2+b^2+a^2+2ab+b^2=2(a^2+ab+b^2)\ ,$$

$$-2(ab+bc+ca)=-2\{ab+b(-a-b)+(-a-b)a\}=-2(-a^2-b^2-ab)=2(a^2+ab+b^2)\ ,$$

よって $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$.

故に，任意の複素数 a,b,c について， $a+b+c=0$ ならば $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$ ，対偶をとると， $a^2+b^2+c^2\neq-2(ab+bc+ca)$ ならば $a+b+c\neq 0$.