

第3章の補遺1 複素数の平方根

問題 3.補遺1

$24 + 10i$ の平方根を $x + iy$ (x, y は実数) とおく : $(x + iy)^2 = 24 + 10i$,
 $x^2 - y^2 + 2ixy = 24 + 10i$. x と y とは実数なので, $x^2 - y^2$ 及び $2xy$ も実数である.
従って $x^2 - y^2 = 24$ かつ $2xy = 10$. $x^2 - y^2 = 24$ の両辺に x^2 を掛けて,
 $x^4 - x^2y^2 = 24x^2$, $x^4 - (xy)^2 = 24x^2$; $xy = 5$ なので, $x^4 - 5^2 = 24x^2$, $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$,
 $(x^2 - 25)(x^2 + 1) = 0$, $x^2 = 25$ または $x^2 = -1$. x は実数なので $x^2 \geq 0$, 従って $x^2 = 25$.
よって $x = \pm 5$. $xy = 5$ より, $x = 5$ のとき $y = 1$, $x = -5$ のとき $y = -1$. 従って

$$x + iy = \pm 5 \pm i = \pm(5 + i) \quad (\text{複号同順}) .$$

故に複素数 $24 + 10i$ の平方根は $\pm(5 + i)$ である.